Capitolul MD. 10

Metoda funcţiilor Liapunov

Fie sistemul diferenţial

$$x' = f(t,x), \quad t \geq t_0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n. \tag{10.1}$$

Presupunem că $x = 0$ este punct de echilibru, adică $f(t,0) = 0$, $\forall t \geq t_0$.

In acest paragraf, funcţia scalară $V(t,x)$, $V : [t_0, \infty) \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1. Mai mult, $x = 0$ este punct interior al lui D şi $V(t,0) = 0$, $\forall t \geq t_0$.

Definiţia 1. *Funcţia $V(t,x)$ se numeşte pozitiv (negativ) definită pe D, dacă există o funcţie $W(x)$ cu proprietăţile $W : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă, $W(0) = 0$ şi $0 < W(x) \leq V(t,x)$ (respectiv $V(t,x) \leq W(x) < 0$), $\forall x \neq 0$, $t \geq t_0$.*

$V(t,x)$ se numeşte pozitiv (negativ) semidefinită pe D dacă schimbăm $<$ $(>)$ cu $\leq$ $(\geq)$.

Exemple

Fie $D = \{(x,y,z) | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ şi $t \geq 0$. Atunci funcţiile:

$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + z^3 = x^2 + 3y^2 + z^2 + z^2(1+z) > 0, \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$ deci este pozitiv definită;

$x^2 + 2y^2 \geq 0$ şi este nulă în punctele $(0,0,z)$, deci este doar pozitiv semidefinită;

$-x^2 \sin^2 t - y^2 - 2z^2$ este negativ semidefinită pentru că este mai mică decât $-y^2 - 2z^2$ care este negativ semidefinită.

Definiţia 2. Derivata orbitală a funcţiei $V(t,x)$ după direcţia câmpului vectorial $f(t,x)$, unde x este soluţie a sistemului diferenţial $x' = f(t,x)$, este:

$$\begin{aligned} L_t V &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} x' = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) = \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(t,x) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(t,x). \end{aligned}$$

Teorema 3. *[1] Fie sistemul diferenţial (10.1) cu $f(t,0) = 0$, $\forall t \geq t_0$. Dacă există $V(t,x)$ pozitiv definită într-o vecinătate a lui $x = 0$, cu derivata orbitală negativ semidefinită, atunci soluţia $x = 0$ este Liapunov-stabilă.*

Demonstraţie Fie $\|x\| \leq R$ vecinătatea lui $x = 0$ pe care există $V(t,x)$ astfel încât $0 < W(x) \leq V(t,x)$, $\forall x \neq 0$, $t \geq t_0$, şi $L_t V \leq 0$. Fie $0 < r < R$ şi compactul $K = \{x \in \mathbb{R}^n | r \leq \|x\| \leq R\}$. Notăm $m = \min_{x \in K} W(x)$, W fiind continuă. Deoarece $V(t,0) = 0, \forall t$, rezultă că există o vecinătate S a lui $x = 0$ astfel încât $\forall x \in S$, $V(t,x) < m$, din moment ce $V(t,x)$ este continuă.

Fie acum $x(t)$ o soluţie care începe în S la momentul $t = t_0$.

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} L_\tau V(\tau, x(\tau))\, d\tau \leq 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

deci

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) < m \leq W(x), \quad \forall x \in K.$$

Aşadar soluţia $x(t)$ nu va intersecta niciodată K pentru că altfel s-ar contrazice faptul că V este pozitiv definită. Repetând acelaşi raţionament pentru R oricât de mic, se deduce stabilitatea soluţiei $x = 0$.

Definiţia 4. *Funcţia scalară $V(t,x)$ introdusă cu teorema 3 se numeşte <u>funcţie Liapunov</u>.*

Teorema 5. *[1] Fie sistemul diferenţial (10.1) cu $f(t,0) = 0$, $\forall t \geq t_0$. Dacă există $V(t,x)$ pozitiv definită într-o vecinătate a lui $x = 0$, $\forall t \geq t_0$, cu derivata orbitală negativ definită, atunci soluţia $x = 0$ este asimptotic stabilă.*

Demonstraţie Din teorema 3 rezultă că $x = 0$ este soluţie stabilă. Presupunem prin absurd că $\forall R > 0$, $\exists x(t)$ o soluţie care începe în domeniul $\|x\| \leq R$, dar care nu tinde la 0. Rezultă că $\exists r > 0$ astfel încât $r \leq \|x(t)\| \leq R$, $\forall t \geq t_0$. Dar $L_t V(t,x) \leq W(x) < 0$, $x \neq 0$.

Fie $K = \{x \in \mathbb{R}^n | r \leq \|x\| \leq R\}$. Cum W este continuă, rezultă că $L_t V(t,x) \leq -\delta < 0$, $\forall x \in K$, $\forall t \geq t_0$. In consecinţă

$$\int_{t_0}^{t} L_\tau V(\tau, x(\tau))\, d\tau \leq -\delta(t - t_0), \forall t \geq t_0,$$

adică $V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) - \delta(t - t_0), \forall t \geq t_0$. In timp $V(t,x)$ ar deveni negativă ceea ce ar contrazice pozitiv definirea sa. Aşadar $x = 0$ este asimptotic stabilă.

Observaţie: Dacă $x_0 \neq 0$ este punct de echilibru pentru sistemul diferenţial (10.1), facem translaţia $x - x_0 = y$ şi sistemul diferenţial obţinut în necunoscuta y, admite originea ca soluţie de echilibru.

Folosind o funcţie Liapunov, se poate deduce şi instabilitatea unei soluţii.

Teorema 6. *[1] Fie sistemul diferenţial $x' = f(t,x)$, cu $t \in [t_0, \infty)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ şi $f(t,0) = 0$, $\forall t \geq t_0$. Dacă există o funcţie $V(t,x)$ definită pe o vecinătate a lui $x = 0$ astfel încât:*

a) Dacă $\|x\| \to 0$, $V(t,x) \to 0$ uniform în raport cu t (adică $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, a.i. $\|x\| < \delta$ implică $|V(t,x)| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$);

b) $L_t V$ este pozitiv definită pe o vecinătate a lui $x = 0$;

c) $\exists t_1 \geq t_0$ astfel încât $V(t,x) > 0, \forall t \geq t_1$ în fiecare vecinătate a lui $x = 0$ suficient de mică;

atunci soluţia nulă este instabilă.

Demonstraţie Din a) şi b) rezultă că $\exists r, R > 0$ a.i. pentru $x \neq 0$ şi $\|x\| \leq r,\ \ L_tV(t,x) \geq W(x) > 0$ şi $|V(t,x)| \leq R.$ Presupunem prin absurd că $x = 0$ este soluţie stabilă. Atunci $\exists \varepsilon > 0$ cu $\varepsilon < r,$ a.i. dacă soluţia $x(t)$ începe în x_0 cu $\|x_0\| \leq \varepsilon,$ avem $\|x(t)\| \leq r$ pentru $t \geq t_1.$ Folosind c) putem alege x_0 a.i. $V(t_1, x_0) > 0.$ Rezultă pentru soluţia $x(t)$ care începe în x_0 la momentul $t = t_1:$

$$V(t,x(t)) - V(t_1,x_0) = \int_{t_1}^{t} L_sV(s,x(s))ds > 0,\ \forall t \geq t_1.$$

Considerăm acum mulţimea punctelor x cu proprietatea că $V(t,x) \geq V(t_1,x_0), \forall t \geq t_1$ şi $\|x\| \leq r.$ Din a) rezultă că $\exists a > 0$ a.i. această mulţime este conţinută în $S = \{x|\ a \leq \|x\| \leq r\}$ compactă. Avem $\mu = \min\limits_{x \in S} W(x) > 0$ şi $L_tV \geq \mu$ pe $S.$

Rezultă că $V(t,x(t)) - V(t_1,x_0) \geq \mu(t-t_1), \forall t \geq t_1.$ Aşadar pentru $\|x\| \leq r,\ V(t,x)$ devine arbitrar de mare şi contrazice $|V(t,x)| \leq R.$ Deci soluţia nulă este instabilă.

In tratarea problemelor de stabilitate, nu există o reţetă care să permită determinarea funcţiei Liapunov pentru sisteme diferenţiale neliniare. Pentru unele sisteme ce modelează fenomene fizice, funcţia Liapunov joacă rol de energie pentru sistem.

Exemplul 1: Fie ecuaţia oscilatorului armonic $x'' + \omega^2 x = 0,$ cu $\omega > 0.$ Ecuaţia este echivalentă cu sistemul diferenţial autonom $x' = y,\ \ y' = -\omega^2 x$ care admite poziţia de echilibru $(0,0).$ Ne interesează problema stabilităţii soluţiei $(0,0).$

Considerăm funcţia Liapunov $V(x,y) = y^2 + \omega^2 x^2$ care, mai puţin un factor constant, reprezintă energia totală a oscilatorului armonic, adică $\frac{1}{2}(x'^2 + \omega^2 x^2).$ Funcţia V este pozitiv definită, iar derivata sa orbitală este $L_tV = 0$ adică V este şi integrală primă pentru sistem. Conform teoremei 3, rezultă că $(0,0)$ este soluţie stabilă.

Exemplul 2: Intr-o vecinătate a lui $(0,0),$ considerăm sistemul diferenţial

$x' = a(t)y + b(t)x(x^2 + y^2)$

$y' = -a(t)x + b(t)y(x^2 + y^2),$

unde funcţiile $a(t)$ şi $b(t)$ sunt continue pentru $t \geq t_0.$ Studiem stabilitatea soluţiei $(0,0).$

Fie $V(x,y) = x^2 + y^2$ ca funcţie Liapunov. V este pozitiv definită, iar $L_tV = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y'$ cu $(x(t),y(t))$ soluţie a sistemului. Obţinem $L_tV = 2b(t)(x^2+y^2)^2.$ Aplicând teoremele 3 şi 6, rezultă că, dacă $b(t) \leq 0, \forall t \geq t_0,$ atunci $(0,0)$ este soluţie stabilă. Dacă $b(t) > 0, \forall t \geq t_0,$ atunci $(0,0)$ este soluţie instabilă.

Bibliografie

[1] F. Verhulst,*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1996

[2] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney,*Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, 2004