Capitolul MD.05. Metoda seriilor de puteri

Cuvinte-cheie
serii de puteri, punct regulat, punct singular, ecuaţie indicială

Considerăm o ecuaţie diferenţială de ordin k

$$L\left(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Se poate căuta soluţia sub forma unei **serii de puteri** în jurul punctului x_0:

$$(x - x_0)^{\sigma} \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \qquad (2)$$

Considerăm că seria se poate deriva termen cu termen. Prin înlocuirea dezvoltării (2) în ecuaţia (1) obţinem o ecuaţie pentru σ şi relaţia de recurenţă pentru coeficienţii a_n. Câţiva coeficienţi vor rămâne nedeterminaţi, având în vedere că soluţia ecuaţiei (1) depinde de k constante. Dacă se poate calcula suma seriei (2), atunci se poate afla soluţia analitică a ecuaţiei (1).

În acest capitol ne vom ocupa de rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi variabili de ordinul al doilea de forma:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad (3)$$

Forma seriei de puteri (2) depinde de natura punctului x_0, adică de comportarea funcţiilor p şi q în jurul punctului x_0. Presupunem că p şi q pot fi dezvoltate în jurul lui x_0 astfel :

$$p(x) = (x - x_0)^{\alpha} \sum_{n \geq 0} p_n (x - x_0)^n$$

$$q(x) = (x - x_0)^{\beta} \sum_{n \geq 0} q_n (x - x_0)^n$$

Punctul x_0 se numeşte **punct regulat** al ecuaţiei (1) dacă $\alpha \geq 0$ şi $\beta \geq 0$ şi **punct singular** în caz contrar .Un punct singular poate fi :

- singular regulat dacă $\alpha \geq -1$ şi $\beta \geq -2$,
- singular neregulat, în rest.

În cele ce urmează vom considera că $x_0 = 0$ (chiar dacă punctul x_0 nu e originea, putem face o schimbare de variabilă: $z = x - x_0$ pentru $x_0 \in IR$ sau $z = \frac{1}{x}$ pentru $x_0 = \infty$).

Dezvoltarea soluţiei pentru $x \to 0$

Vom considera următoarele cazuri :

i) originea punct regulat
ii) originea punct singular regulat
iii) originea punct singular neregulat

i) Dacă originea este **punct regulat** pentru ecuaţia (1), atunci toate soluţiile liniar independente ale ecuaţiei vor avea dezvoltări convergente în serie Taylor de forma:

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \qquad (4)$$

Exemplul 1. Să se integreze ecuaţia prin metoda seriilor de puteri

$$y''(x) + \frac{x}{1-x} y'(x) + \frac{1}{x-1} y(x) = 0 \ , \ x \in (0,1)$$

Rezolvare.
Derivăm dezvoltarea (4) de două ori :

$$y'(x)=\sum_{n\ge1} n\,a_n x^{n-1}$$
$$y''(x)=\sum_{n\ge2} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

şi introducem în ecuaţie :

$$\sum_{n\ge2} n(n-1)a_n x^{n-1}-\sum_{n\ge2} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n\ge1} n\,a_n x^n+\sum_{n\ge0} a_n x^n=0$$
$$\Rightarrow a_0-2a_2+\sum_{n\ge2} n(n-1)a_n x^{n-1}-\sum_{n\ge3} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n\ge1} na_n x^n+\sum_{n\ge1} a_n x^n=0$$

Notăm în prima sumă $m=n-2$, în a doua $m=n-3$ şi în ultimele două $m=n-1$.
Vom avea :

$$a_0-2a_2+\sum_{m\ge0}\left[(m+1)(m+2)a_{m+2}-(m+2)(m+3)a_{m+3}-(m+1)a_{m+1}+a_{m+1}\right]x^{m+1}=0$$

Egalăm cu zero coeficientul lui x^{m+1} şi termenul liber:

$$a_2=\frac{a_0}{2}$$
$$a_{m+3}=\frac{(m+1)(m+2)a_{m+2}-ma_{m+1}}{(m+2)(m+3)};\qquad m\ge0$$

Atunci $a_1\in R$, $a_3=\frac{a_0}{3!}$, $a_4=\frac{a_0}{4!}$,etc. Deci :

$$y(x)=a_1x+a_0\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}.....\right)\Rightarrow\quad y(x)=a_1x+a_0\left(e^x-x\right)$$

Două soluţii liniar independente ale ecuaţiei sunt $y_1(x)=x$ şi $y_2(x)=e^x$, deci soluţia generală este $y(x)=C_1x+C_2e^x$.

Observaţie. Prin metoda seriilor de puteri am obţinut de fapt soluţia analitică a ecuaţiei.

ii) Dacă originea este **punct singular regulat** al ecuaţiei (3), cel puţin o soluţie este de tip Frobenius :

$$y(x)=\sum_{n\ge0} a_n x^{n+\sigma}\tag{5}$$

unde σ se numeşte **indice**. Se înlocuieşte dezvoltarea (5) în ecuaţia (3) şi se obţine o ecuaţie algebrică pentru σ numită **ecuaţie indicială**. Soluţiile ecuaţiei (3) depind de cele două rădăcini σ_1,σ_2 ale ecuaţiei indiciale. Aproximarea soluţiei este o sumă parţială a seriei

$$y(x)\sim S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+\sigma}$$

iar eroarea este $\left|y(x)-S_n(x)\right|=O\left(x^{n+\sigma+1}\right)$.

Pot apărea următoarele cazuri :

a) $\sigma_1\ne\sigma_2$ şi $\sigma_1-\sigma_2\notin Z$. În acest caz ecuaţia (3) are două soluţii liniar independente de forma (5).

b) Dacă $\sigma_1\ne\sigma_2$ şi $\sigma_1-\sigma_2\in Z$ pot apărea două cazuri :

- unul sau mai mulţi coeficienţi din dezvoltarea (5) sunt infinit pentru $\sigma=\sigma_1$
- unul sau mai mulţi coeficienţi din dezvoltarea (5) sunt nedeterminaţi pentru $\sigma=\sigma_1$

c) Dacă $\sigma_1=\sigma_2$ atunci două soluţii liniar independente sunt:

$$y_1(x) = y(x,\sigma_1)$$
$$y_2(x) = \lim_{\sigma\to\sigma_1} \frac{\partial y}{\partial \sigma}(x,\sigma)$$

unde $y(x,\sigma)$ este dezvoltarea (5) în care coeficienţii a_n s-au înlocuit în funcţie de a_0 şi σ. O altă metodă pentru determinarea lui y_2 este să-l căutăm de forma

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{\sigma_1}\sum_{n\ge 0} b_n x^n$$

Exemplul 2. Să se rezolve ecuaţia Bessel:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right)y(x) = 0,\ x \in (0,\infty), \nu \in IR_+$$

<u>Rezolvare</u>.

Avem $p(x) = x^{-1}$ şi $q(x) = x^{-2}\left(-\nu^2 + x^2\right)$, deci $\alpha = -1, \beta = -2$. Dacă înlocuim $y(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^{n+\sigma}$ avem:

$$\sum_{n\ge 0} a_n (n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma} + \sum_{n\ge 0} a_n (n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n\ge 0} a_n x^{n+\sigma+2} - \sum_{n\ge 0} \nu^2 a_n x^{n+\sigma} = 0$$

$$\left(\sigma^2 - \nu^2\right)a_0 x^\sigma + \left(\sigma^2 + 2\sigma + 1 - \nu^2\right)a_1 x^{\sigma+1} + \sum_{m\ge 0}\left\{a_{m+2}\left[(m+\sigma+2)^2 - \nu^2\right] + a_m\right\}x^{m+\sigma+2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sigma^2 - \nu^2\right)a_0 = 0,$$
$$\left[(\sigma+1)^2 - \nu^2\right]a_1 = 0,$$
$$a_{m+2}(m+\sigma+2+\nu)(m+\sigma+2-\nu) = -a_m,\ m \ge 1$$

Pentru ca $a_0 \ne 0$ luăm $\sigma^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \nu, \sigma = -\nu$. Dacă $\sigma = \nu$, din a doua ecuaţie se obţine $a_1 = 0$, iar din a treia :

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(m+2)(m+2+2\nu)} \Rightarrow a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)},\ n \ge 1,\ a_{2n+1} = 0$$

Atunci

$$y(x) = a_0 + a_0 \sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)} x^{\nu+2n} \Rightarrow$$

Dacă alegem $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \cdot \Gamma(\nu+1)} \Rightarrow$ o soluţie a ecuaţiei va fi funcţia Bessel de speţa

întâi şi ordin ν : $J_\nu(x) = \sum_{n\ge 0} \dfrac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$, unde Γ este funcţia Gamma

iar seria este convergentă pe IR. Dacă $\nu \in Z$ atunci funcţia Bessel se rescrie

$$J_\nu(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

Pentru $\sigma = -\nu$

- dacă $\nu \notin Z$ rezultă $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+n)}$. Atunci o altă soluţie

a ecuaţiei va fi $J_{-\nu}(x) = \sum_{n\ge 0} \dfrac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\nu+n+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}$. Cele două soluţii sunt liniar independente, deci soluţia generală se scrie

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

- dacă $\nu \in Z$ atunci $J_{-\nu}(x) = (-1)^{\nu} J_{\nu}(x)$, deci cele două funcţii nu sunt independente.

Pentru a obţine o soluţie liniar independentă faţă de $J_{\nu}(x)$ luăm

$$y(x,\sigma) = a_0 x^{\sigma}\left[1 - \frac{x^2}{(\sigma+2-\nu)(\sigma+2+\nu)} + \frac{x^4}{(\sigma+2-\nu)(\sigma+2+\nu)(\sigma+4-\nu)(\sigma+4+\nu)} - \ldots\right]$$

Dacă $\nu = k \in Z$ atunci unul dintre numitori va fi 0, şi anume $\sigma + 2k - \nu$. Luăm $a_0 = \sigma + 2k - \nu$

$\Rightarrow$ $a_0 = \sigma + \nu$ şi $y_2(x) = \dfrac{\partial y}{\partial \sigma}(x,-\nu)$.

$$y(x) = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 y_2(x)$$

Exemplul 3. Să se rezolve ecuaţia prin metoda seriilor de puteri pentru $x \to 0$.

$$x^2 y''(x) - 5xy'(x) + 9(1-x)y(x) = 0,\ x \in (0,\infty)$$

<u>Rezolvare</u>.

$$p(x) = -5x^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$$

$$q(x) = \frac{9(1-x)}{x^2} = 9x^{-2}(1-x) \ \Rightarrow \quad \beta = -2$$

Deci 0 este punct singular regulat. Introducem dezvoltarea (5) în ecuaţie:

$$\sum_{n\ge0} a_n (n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma} - \sum_{n\ge0} 5a_n (n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n\ge0} 9a_n x^{n+\sigma} - \sum_{n\ge0} 9a_n x^{n+\sigma+1} = 0$$

$$\Rightarrow a_0[\sigma(\sigma-1) - 5\sigma + 9]x^{\sigma} + \sum_{m\ge0}\{a_{m+1}[(m+\sigma+1)(m+\sigma) - 5(m+\sigma+1) + 9] - 9a_m\}x^{m+\sigma+1} = 0$$

Obţinem ecuaţia indicială $\sigma^2 - 6\sigma + 9 = 0$, deci $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$ şi $a_{m+1} = \dfrac{9a_m}{(m+\sigma-2)^2}$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{9}{(\sigma-2)^2}a_0; a_2 = \frac{9}{(\sigma-1)^2}a_1 = \frac{9^2}{(\sigma-2)^2(\sigma-1)^2}a_0, a_3 = \frac{9^3}{(\sigma-2)^2(\sigma-1)^2\sigma^2}a_0$$

Deci

$$y(x,\sigma) = a_0 x^{\sigma}\left[1 + \frac{9}{(\sigma-2)^2}x + \frac{9^2}{(\sigma-2)^2(\sigma-1)^2}x^2 + \frac{9^3}{(\sigma-2)^2(\sigma-1)^2\sigma^2}x^3 \ldots\right]$$

$$\Rightarrow y_1(x) = y(x,3) = a_0 x^3\left(1 + \frac{9}{1^2}x + \frac{9^2}{(2!)^2}x + \frac{9^3}{(3!)^2}x^3 \ldots\ldots\right)$$

Considerăm $a_0 = 1 \Rightarrow$ $y_1(x) = \sum_{n\ge0}\dfrac{9^n}{(n!)^2}x^{n+3}$, seria fiind convergentă pe IR.

$$y_2(x) = \lim_{\sigma\to3}\frac{\partial y}{\partial\sigma} = \lim_{\sigma\to3} a_0 x^{\sigma}\ln x \cdot \left[1 + \frac{9}{(\sigma-2)^2}x + \ldots\right] +$$

$$+ a_0 x^{\sigma}\left[-\frac{18}{(\sigma-2)^3}x - \frac{2\cdot 9^2(2\sigma-3)}{(\sigma-1)^3(\sigma-2)^3}x^2 - \ldots\right]$$

$$\Rightarrow\ y_2(x) = y_1(x)\ln x - \left(18x^4 + \frac{243}{4}x^5 + \ldots\right),\ x \in (0,\infty)$$

Soluţia generală este $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

iii) Dacă originea este punct singular neregulat, se caută soluţia de forma

$$y(x)=e^{\lambda x^{-\nu}}v(x) \qquad (6)$$

unde $\lambda\in IR$ şi $\nu\in Q_+$ se determină înlocuind în ecuaţie, după care se obţine o ed. de ordinul al doilea pentru $v=v(x)$, pentru care căutăm o dezvoltare în serie de puteri de tipul :

$$v(x)=\sum_{n\geq 0}a_n\left(x^{\nu}\right)^{n+\sigma} \qquad (7)$$

Exemplul 4. Să se rezolve ecuaţia prin metoda seriilor de puteri pentru $x\to 0$.

$$x^4\left(1-x^2\right)y''(x)+2x^3y'(x)+\left(x^2-1\right)^3y(x)=0,\ x\in(0,1)$$

<u>Rezolvare</u>.

Avem :

$$p(x)=\frac{2}{x\left(1-x^2\right)}=2x^{-1}\left(1+x^2....\right)$$

$$q(x)=\frac{\left(x^2-1\right)^3}{x^4\left(1-x^2\right)}=-\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^4}=x^{-4}\left(-1+2x^2-x^4\right)$$

Deci $\alpha=-1,\ \beta=-4$ şi originea este un punct singular neregulat. Căutăm mai întâi o dezvoltare de forma

$$y\sim e^{\lambda x^{-\nu}},\quad \nu>0$$

Înlocuim y,y',y'' în ecuaţie şi împărţim cu $e^{\lambda x^{-\nu}}$:

$$\lambda^2\nu^2x^{-2\nu+2}-\lambda^2\nu^2x^{-2\nu-4}+\lambda\nu(\nu-1)x^{-\nu+2}-\lambda\nu(\nu+1)x^{-\nu-4}+x^6-3x^4+3x^2-1=0$$

Dacă $x\to 0$ atunci

$$x^{-2\nu+2}>>x^{-2\nu+4}$$
$$x^{-2\nu+2}>>x^{-\nu-2}>>x^{-\nu+4}$$
$$1>>x^2>>x^4>>x^6$$

deci termenii dominanţi sunt $x^{-2\nu+2}$ şi 1. Luăm $x^{-2\nu+2}=O(1)\Rightarrow -2\nu+2=0\Rightarrow\nu=1$

Egalăm cu zero coeficientul termenului dominant şi obţinem :

$$\lambda^2\nu^2-1=0\Rightarrow\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm 1$$

Facem schimbarea de funcţie :

$$y(x)=e^{\lambda x^{-1}}v(x)$$

Ecuaţia pentru v este:

$$\left(x^2-x^4\right)v''(x)+\left(2\lambda x^2+2x-2\lambda\right)v'(x)+\left(x^4-3x^2-2\lambda x+2\right)v(x)=0$$

Căutăm dezvoltarea soluţiei de tip Frobenius:

$$v(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+\sigma}$$

$$\Rightarrow\left(x^2-x^4\right)\sum_{n\geq 0}a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma-2}+\left(2\lambda x^2+2x-2\lambda\right)$$
$$+\sum_{n\geq 0}a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma-1}+\left(x^4-3x^2-2\lambda x+2\right)\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+\sigma}=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n\geq 0}a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma}-\sum_{n\geq 0}a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma+2}+\sum_{n\geq 0}2\lambda a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma+1}$$
$$+\sum_{n\geq 0}2a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma}-\sum_{n\geq 0}2\lambda a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma-1}+\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+\sigma+4}-\sum_{n\geq 0}3a_nx^{n+\sigma+3}-\sum_{n\geq 0}2\lambda a_nx^{n+\sigma+1}+\sum_{n\geq 0}2a_nx^{n+\sigma}=0$$

Termenul dominant este:

$$-2\lambda\sigma a_0 x^{\sigma-1}$$

Deoarece $\lambda \neq 0, a_0 \neq 0 \Rightarrow \sigma = 0$. Atunci ecuaţia se reduce la

$$2a_0 - 2\lambda a_1 + x(-4\lambda a_2 + 4a_1 - 2\lambda a_0) +$$
$$+ x^2(-6\lambda a_3 + 8a_2 - 3a_0) + x^3(-8\lambda a_4 + 14a_3 + 2\lambda a_2 - 3a_1) +$$
$$+ \sum_{m\geq 0}\left[-2\lambda(m+5)a_{m+5} + \left(m^2 + 9m + 22\right)a_{m+4} + 2\lambda(m+2)a_{m+3} - \left(m^2 + 3m + 5\right)a_{m+2} + a_m\right]x^{m+4} = 0$$

Egalăm coeficienţii cu zero şi obţinem $a_n = \frac{\lambda^n a_0}{n!}$. Atunci $v(x) = a_0 \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda x)^n}{n!}$ $\Rightarrow v(x) = a_0 e^{\lambda x}$. Deci $y(x) = e^{\lambda x^{-1}} v(x) = a_0 e^{\lambda(x + x^{-1})}$. Luăm $y_1(x) = e^{x + x^{-1}}$ şi $y_2(x) = e^{-x - x^{-1}}$ Atunci

$$y(x) = C_1 e^{x + x^{-1}} + C_2 e^{-x - x^{-1}}$$

Bibliografie

1. Spânulescu, I., Olariu, V., *Introducere în fizica matematică*, Ed. Victor, Bucureşti, 2001
2. Homentcovschi, D., *Elemente de analiză asimptotică*, Matematici clasice şi moderne, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1983
3. Trandafir Măgureanu, M., *Introducere în teoria aproximaţiei asimptotice*, Ed. Printech, Bucureşti, 1999