MD.03.Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Cuvinte cheie

Polinom caracteristic, ecuaţie caracteristică

Definiţia 1. O ecuaţie de forma

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \quad (3.1)$$

cu $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constante se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi**.

Dacă $f(x) \equiv 0$, se spune că ecuaţia (3.1) este **omogenă** , iar dacă $f(x)$ nu este identic nulă , se spune că ecuaţia este **neomogenă** .

Definiţia 2. Se numeşte **polinomul caracteristic ataşat ecuaţiei omogene** $L[y] = 0$, polinomul $F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n$, iar $F(r) = 0$ se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei $L[y] = 0$.

Teorema 1. *1. Dacă ecuaţia caracteristică $F(r) = 0$ are rădăcini reale şi distincte $r_1, r_2, \ldots, r_n$, atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi $L[y] = 0$ este*

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}, y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}, \ldots, y_n(x) = \mathrm{e}^{r_n x}.$$

2. Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice $F(r) = 0$ există şi rădăcini reale multiple, de exemplu r_1 este rădăcină cu ordinul de multiplicitate p, atunci ei îi corespund p soluţii liniar independente ale ecuaţiei $L[y] = 0$:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}, y_2(x) = x\mathrm{e}^{r_1 x}, \ldots, y_p(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{r_1 x}.$$

3. Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice $F(r) = 0$ există şi rădăcini complexe, de exemplu $r = a + \mathrm{i}b, \overline{r} = a - \mathrm{i}b$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluţii liniar independente

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{ax} \cos bx, y_2(x) = \mathrm{e}^{ax} \sin bx.$$

4. Dacă ecuaţia caracteristică $F(r) = 0$ are printre soluţiile ei rădăcini complexe $r = a + \mathrm{i}b, \overline{r} = a - \mathrm{i}b$ cu ordinul de multiplicitate p, atunci lor le corespund $2p$ soluţii liniar independente

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos bx, y_2(x) = x\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \ldots, y_p(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx$$

$$y_{p+1}(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin bx, y_{p+2}(x) = x\mathrm{e}^{ax}\sin bx, \ldots, y_{2p}(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx.$$

Demonstraţie. 1. Verificăm că $y_k(x) = \mathrm{e}^{r_k x}$ este soluţia ecuaţiei $L[y] = 0$ pentru $\forall k = \overline{1, n}$. Avem $L[y_k] = \mathrm{e}^{r_k x}(a_0 r_k^n + a_1 r_k^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$, deoarece r_k este rădăcina ecuaţiei caracteristice. Deci $y_k(x) = \mathrm{e}^{r_k x}$ este soluţia ecuaţiei $L[y] = 0$ pentru $\forall k = \overline{1, n}$.

Soluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental, deoarece wronskianul lor este egal cu produsul dintre $\mathrm{e}^{(r_1+\ldots+r_n)x}$ şi determinantul Vandermonde al numerelor distincte $r_1, \ldots, r_n$ şi deci este diferit de zero. Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene este $y = c_1\mathrm{e}^{r_1 x} + c_2\mathrm{e}^{r_2 x} + \ldots + c_n\mathrm{e}^{r_n x}$.

2. Dacă r_1 este rădăcină ecuaţiei caracteristice cu ordinul de multiplicitate p, atunci

$$F(r_1) = 0, F'(r_1) = 0, F''(r_1) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(r_1) = 0, F^{(p)}(r_1) \neq 0.$$

Pentru $y = \mathrm{e}^{rx}z$, calculăm derivatele cu ajutorul formulei lui Leibniz şi obţinem

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{e}^{rx}(rz + z') \\ y'' &= \mathrm{e}^{rx}(r^2 z + 2rz + z'') \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \mathrm{e}^{rx}(r^n z + C_n^1 r^{n-1} z' + C_n^2 r^{n-2} z'' + \ldots + C_n^n z^{(n)}), \end{aligned} \tag{1}$$

de unde rezultă că $L[\mathrm{e}^{rx}z] = \mathrm{e}^{rx}(b_n z + b_{n-1}z' + \ldots + b_0 z^{(n)})$, unde coeficienţii se determină cu formulele (1). Avem

$$b_n = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = F(r)$$

şi în general

$$b_{n-j} = C_n^j r^{n-j} + a_1 C_{n-1}^j r^{n-j-1} + \ldots + a_{n-j} C_j^j = \frac{F^{(j)}(r)}{j!}, \;\; j = \overline{1, n}$$

De unde rezultă că

$$L[\mathrm{e}^{rx}z] = \mathrm{e}^{rx}\left[F(r)z + \frac{F'(r)}{1!}z' + \frac{F''(r)}{2!}z'' + \ldots + \frac{F^{(n)}(r)}{n!}z^{(n)}\right]$$

Aşadar, $L[\mathrm{e}^{r_1x}z] = \mathrm{e}^{r_1x}\left[\frac{F^{(p)}(r_1)}{p!}z^{(p)} + \ldots + \frac{F^{(n)}(r_1)}{n!}z^{(n)}\right]$.

Dacă z este înlocuit cu $1, x, \ldots, x^{p-1}$, paranteza din membrul al doilea este nulă şi, prin urmare, avem

$$L[\mathrm{e}^{r_1x}] = 0, L[x\mathrm{e}^{r_1x}] = 0, \ldots, L[x^{p-1}\mathrm{e}^{r_1x}] = 0,$$

ceea ce înseamnă că $\mathrm{e}^{r_1x}, x\mathrm{e}^{r_1x}, \ldots, x^{p-1}\mathrm{e}^{r_1x}$ sunt soluţiile ecuaţiei diferenţiale $L[y] = 0$.

Inmulţind aceste soluţii cu constante oarecare şi adunând deducem că la rădăcina r_1 cu ordinul de multiplicitate p a ecuaţiei caracteristice corespunde soluţia $y = \mathrm{e}^{r_1x}(c_0x^{p-1}+c_1x^{p-2}+\ldots+c_{p-1})$ ce depinde de p constante oarecare $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$.

3. Fie $r = a + \mathrm{i}b$ rădăcină complexă a ecuaţiei caracteristice. Aceasta înseamnă că funcţia $y = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx} = \mathrm{e}^{ax}\cos bx + \mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ este o soluţie complexă a ecuaţiei $L[y] = 0$. Deoarece $L[\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\sin bx] = 0$ este echivalent cu $L[\mathrm{e}^{ax}\cos bx]+\mathrm{i}L[\mathrm{e}^{ax}\sin bx] = 0$, înseamnă că $L[\mathrm{e}^{ax}\cos bx] = 0$ şi $L[\mathrm{e}^{ax}\sin bx] = 0$, deci $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ şi $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ sunt soluţii ale ecuaţiei $L[y] = 0$ ce corespund oricărei rădăcini complexe $r = a + \mathrm{i}b$ a ecuaţiei caracteristice.

4. Rezultă din 2 şi 3. □

Teorema 2. *Fie $\overline{y}$ soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi şi y_p o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $L[y] = f$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene este $y = \overline{y} + y_p$, y_p putându-se determina întotdeauna prin metoda variaţiei constantelor.*

In anumite cazuri se poate determina forma soluţiei particulare y_p după forma funcţiei $f(x)$. Indicăm în continuare câteva astfel de cazuri:

1. Dacă $f = c$, $F(0) \neq 0$, atunci

$$y_p(x) = \frac{c}{a_n}$$

2. Dacă $f = c$, $F(0) = 0, F'(0) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(0) = 0, F^{(p)}(0) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \frac{cx^p}{p!a_{n-p}}$$

3. Dacă $f = c\mathrm{e}^{\alpha x}$, $F(\alpha) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \frac{c\mathrm{e}^{\alpha x}}{F(\alpha)}$$

4. Dacă $f = c\mathrm{e}^{\alpha x}$, $F(\alpha) = 0, F'(\alpha) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(\alpha) = 0, F^{(p)}(\alpha) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \frac{c\mathrm{e}^{\alpha x}x^p}{F^{(p)}(\alpha)}$$
Prin schimbarea de funcţie $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}z(x)$, $z(x)$ fiind noua funcţie necunoscută regăsim cazurile 1,2.

5. Dacă $f = P_m(x)$ şi $F(0) \neq 0$, $P_m(x)$ fiind un polinom în x de grad m, atunci
$$y_p(x) = Q_m(x), \text{ unde } Q_m(x) \text{ este un polinom în } x \text{ de grad } m$$

6. Dacă $f = P_m(x)$ şi $F(0) = 0, F'(0) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(0) = 0, F^{(p)}(0) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = x^p Q_m(x)$$

7. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x}P_m(x)$ şi $F(\alpha) \neq 0$, $P_m(x)$ fiind un polinom în x de grad m, atunci
$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}Q_m(x), \text{ unde } Q_m(x) \text{ este un polinom în } x \text{ de grad } m$$

8. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x}P_m(x)$, $F(\alpha) = 0, F'(\alpha) = 0, \ldots, F^{(p-1)}(\alpha) = 0, F^{(p)}(\alpha) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = x^p\mathrm{e}^{\alpha x}Q_m(x)$$
In cazurile 7 şi 8 punând $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}z(x)$, $z(x)$ fiind noua funcţie necunoscută , regăsim rezultatele de la punctele 5 şi 6.

9. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x}P_m^1(x)\cos\beta x + \mathrm{e}^{\alpha x}P_m^2(x)\sin\beta x$, iar $F(\alpha + \mathrm{i}\beta) \neq 0$, atunci
$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}[Q_m^1(x)\cos\beta x + Q_m^2(x)\sin\beta x]$$

10. Dacă $f = \mathrm{e}^{\alpha x} P_m^1(x) \cos \beta x + \mathrm{e}^{\alpha x} P_m^2(x) \sin \beta x$ şi $\alpha + \mathrm{i}\beta$ este o rădăcină multiplă de ordinul p a lui $F(r)$, atunci

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} x^p [Q_m^1(x) \cos \beta x + Q_m^2(x) \sin \beta x]$$

Folosind formulele lui Euler

$$\cos \beta x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}}{2} \text{ şi } \sin \beta x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}}{2\mathrm{i}},$$

cazurile 9 şi 10 se reduc la cele de la punctele 7 şi 8.