Ciprian Deliu

TRIGONOMETRIE PLANĂ ŞI SFERICĂ

2015

Cuprins

Capitolul 1

Trigonometrie plană

1.1 Unghiuri. Clasificarea şi măsurarea unghiurilor

Două semidrepte (a) şi (b) având originea în acelaşi punct O definesc un **unghi** notat $\widehat{(a,b)}$ sau $\measuredangle aOb$. Originea O a semidreptelor se numeşte **vârful** unghiului, iar cele două semidrepte sunt **laturile** lui.

Unghiul $\measuredangle AOB$ se consideră **orientat pozitiv** dacă semidreapta OA se poate suprapune peste semidreapta OB printr-o rotaţie în sens invers acelor de ceasornic (*sens trigonometric* sau *sens pozitiv*).

Două unghiuri sunt **congruente** dacă prin suprapunere coincid. Se numesc unghiuri **adiacente** două unghiuri care au o latură comună, vârful comun şi celelalte laturi de o parte şi de alta a laturii comune.

Bisectoarea unui unghi este semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului şi care formează cu laturile unghiului iniţial unghiuri congruente.

Două drepte sunt **perpendiculare** dacă semidreptele lor formează unghiuri adiacente congruente. Un unghi cu laturile perpendiculare se numeşte **unghi drept**.

Fie un cerc cu centrul în punctul O şi de rază r. Un unghi cu vârful în O se numeşte **unghi la centru**. Dacă A şi B sunt intersecţiile laturilor unui unghi la centru cu cercul, spunem că unghiul $\measuredangle AOB$ determină **arcul de cerc** $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$. Domeniul mărginit de razele $\overline{OA}, \overline{OB}$ şi de arcul $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ se numeşte **sector de cerc**.

Dacă A' este cealaltă intersecţie a dreptei (OA) cu cercul, atunci segmentul $\overline{AA'}$ este **diametru** al cercului şi are lungimea $2r$. Un diametru împarte cercul în două arce egale numite **semicercuri**.

Două puncte M şi N de pe cerc astfel încât segmentul $\overline{MN}$ are lungimea mai mică decât $2r$ formează o **coardă**. Domeniul plan mărginit de o coardă $\overline{MN}$ şi arcul corespunzător $\overset{\frown}{MN}$ formează un **segment** de cerc. Un unghi care are vârful pe cerc şi laturile sunt coarde ale cercului se numeşte **unghi înscris** în cerc.

Pe acelaşi cerc, la unghiuri la centru congruente corespund arce congruente şi reciproc. Lungimea unui arc este proporţională cu mărimea unghiului la centru corespunzător. Compararea unghiurilor se face prin compararea arcelor determinate pe acelaşi cerc de către unghiurile la centru.
Unităţi de măsură pentru unghiuri:

- **radian** - unghiul pentru care raportul dintre arcul corespunzător şi rază este 1. Cercul întreg are 2π radiani, un semicerc are π radiani, iar unghiul drept are $\frac{\pi}{2}$ radiani

- **grad sexagesimal** - unghiul congruent cu a 90-a parte a unghiului drept, notat 1^0. A 60-a parte dintr-un grad sexagesimal se numeşte **minut sexagesimal**, notat $1'$, iar a 60-a parte dintr-un minut sexagesimal se numeşte **secundă sexagesimală**, notată $1''$. Avem $1^0 = 60' = 3600''$

- **grad centesimal** - unghiul congruent cu a 100-a parte a unghiului drept, notat 1^g. A 100-a parte dintr-un grad centesimal se numeşte **minut centesimal**, notat 1^c, iar a 100-a parte dintr-un minut centesimal se numeşte **secundă centesimală**, notată 1^{cc}. Avem $1^g = 100^c = 10000^{cc}$

După mărime, unghiurile se clasifică astfel:

- unghi *nul*: $0^0 = 0rad = 0^g$

- unghi *ascuţit*: $0^0 < \alpha^0 < 90^0$ sau $0 < \hat{\alpha} < \frac{\pi}{2}$ sau $0^g < \alpha^g < 100^g$

- unghi *drept*: $90^0 = \frac{\pi}{2}rad = 100^g$

- unghi *obtuz*: $90^0 < \alpha^0 < 180^0$ sau $\frac{\pi}{2} < \hat{\alpha} < \pi$ sau $100^g < \alpha^g < 200^g$

- unghi *alungit* $180^0 = \pi rad = 200^g$

- unghi *supraobtuz* (sau *reflex*): $180^0 < \alpha^0 < 360^0$ sau $\pi < \hat{\alpha} < 2\pi$ sau $200^g < \alpha^g < 400^g$

- unghi *complet*: $360^0 = 2\pi rad = 400^g$

Cum lungimea cercului este $2\pi r$ iar aria interiorului cercului este πr^2 şi aceste formule corespund la unghiul complet, pentru un arc oarecare α deducem că lungimea unui arc de cerc este

$$L_{arc} = \frac{\pi r \alpha^0}{180} = \hat{\alpha} r,$$

iar aria unui sector de cerc este

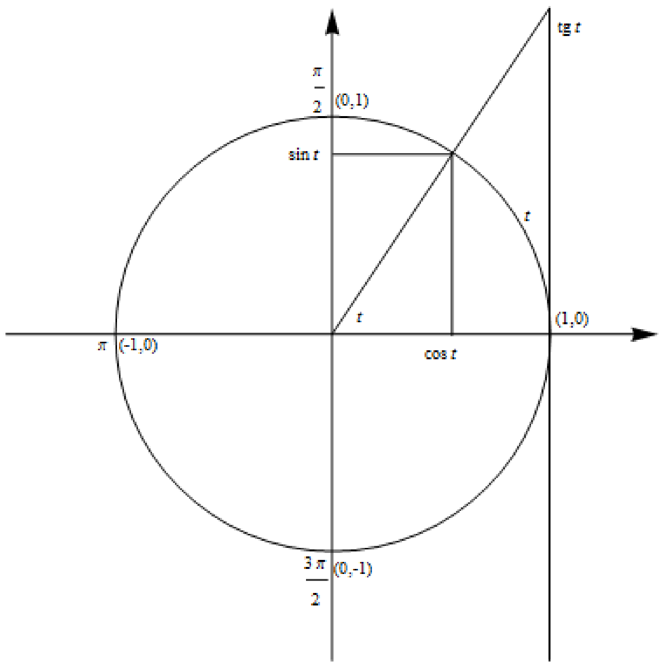
$$A_{sector} = \frac{\pi r^2 \alpha^0}{360} = \frac{\hat{\alpha} r^2}{2}.$$

Fie în plan un sistem de coordonate cartezian xOy. Se numeşte **cerc trigonometric** cercul Γ cu centrul în originea O şi de rază $r = 1$. Orientarea pozitivă a arcelor pe cerc este dată de *sensul trigonometric* (invers acelor de ceasornic). Lungimea circumferinţei unui cerc de rază r este $2\pi r$, deci lungimea cercului trigonometric este 2π.

Pe cercul trigonometric, oricărui unghi la centru de măsură $\alpha \in [0, 2\pi]$ îi corespunde pe cerc un arc de măsură egală, măsurat în sens trigonometric de la punctul $(1, 0)$ la un punct P de pe cerc. După cum unghiul α este ascuţit, obtuz sau supraobtuz, punctul corespunzător P este în cadranul I, II, III sau IV.

Pentru valori mai mari decât 2π (sau negative) putem găsi de asemenea puncte corespunzătoare pe cercul trigonometric

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } t = \alpha + 2k\pi$$



Definim funcţia $f : \mathbb{R} \to \Gamma$ prin $f(t) = P$ unde P este unicul punct de pe cercul trigonometric Γ pentru care arcul orientat pozitiv măsurat pe cerc din punctul $(1,0)$ până la P are lungimea α.

1.2 Funcţii trigonometrice

Funcţia definită anterior se numeşte *funcţia de trecere de la dreapta reală la cercul trigonometric* şi are următoarele proprietăţi:

- nu este injectivă: $f(t) = f(t + 2\pi)$
- este surjectivă
- este periodică de perioadă principală 2π

Cu ajutorul acestei funcţii sunt definite funcţiile cos şi sin:

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \cos t = x_P$$

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \sin t = y_P$$

aşadar *cosinusul* şi *sinusul* în $t \in \mathbb{R}$ sunt abscisa, respectiv ordonata unicului punct de pe cercul trigonometric corespunzător lui t.

În valorile lui t pentru care $\cos t \neq 0$ se definesc:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t},\ \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

În valorile lui t pentru care $\sin t \neq 0$ se definesc:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t},\ \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}$$

Într-un triunghi dreptunghic având unul din unghiurile ascuţite θ obţinem

$$\sin\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}},\ \cos\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}},\ \operatorname{ctg}\theta = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta alăturată}},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta opusă}}$$

De asemenea avem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{ctg}\theta$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{tg}\theta,\ \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta,\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

Din teorema lui Pitagora se obţine *formula fundamentală a trigonometriei*

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile importante din primul cadran sunt:

θ	0	$\frac{\pi}{6}(30^0)$	$\frac{\pi}{4}(45^0)$	$\frac{\pi}{3}(60^0)$	$\frac{\pi}{2}(90^0)$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiuri din cadranele II, III şi IV pot fi calculate folosind următoarele formule de reducere la primul cadran:

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta,\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta$$

Proprietăţi ale funcţiei sin:

- este funcţie impară: $\sin(-x)=-\sin x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

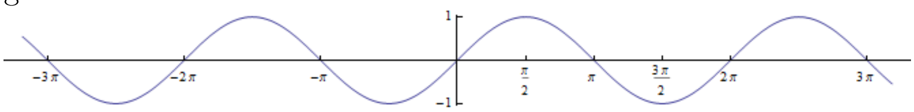
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$:

$$(\sin x)'=\cos x$$

- dezvoltarea în serie de puteri:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

- grafic:



Proprietăţi ale funcţiei cos:

- este funcţie pară: $\cos(-x) = \cos x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

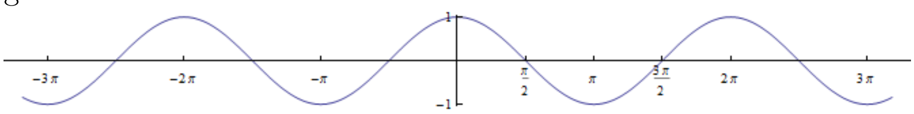
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

- dezvoltarea în serie de puteri:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

- grafic:

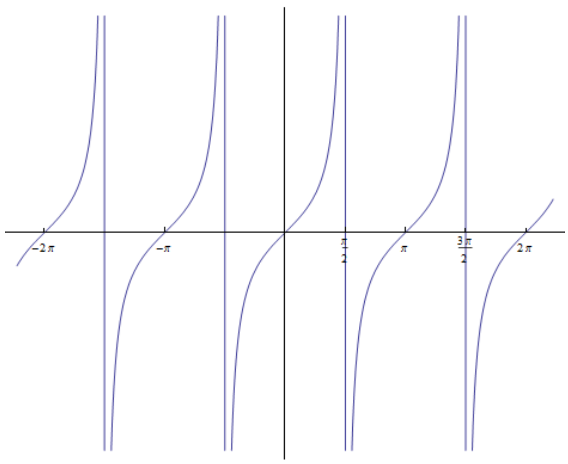


Proprietăţi ale funcţiei tg:

- este funcţie impară: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- este funcţie periodică de perioadă π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- grafic:

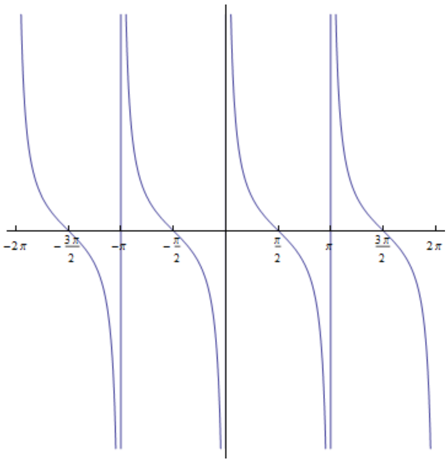


Proprietăţi ale funcţiei ctg:

- este funcţie impară: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
- este funcţie periodică de perioadă π: $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$:

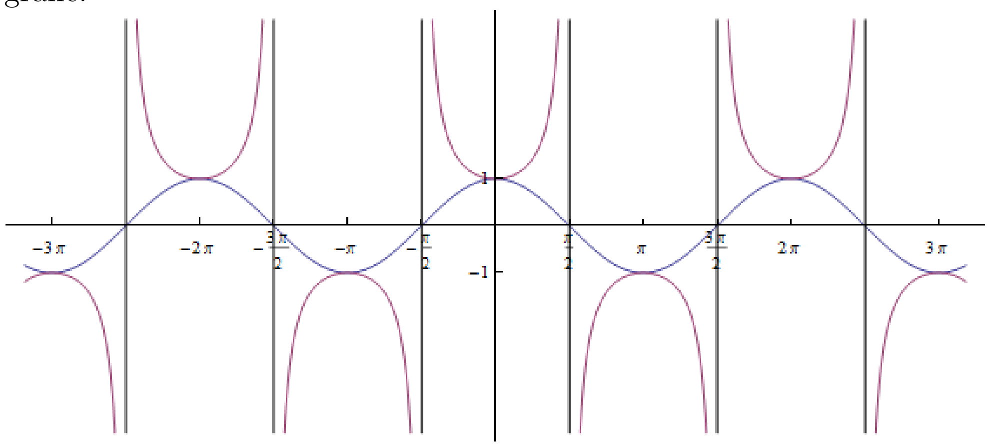
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

- grafic:



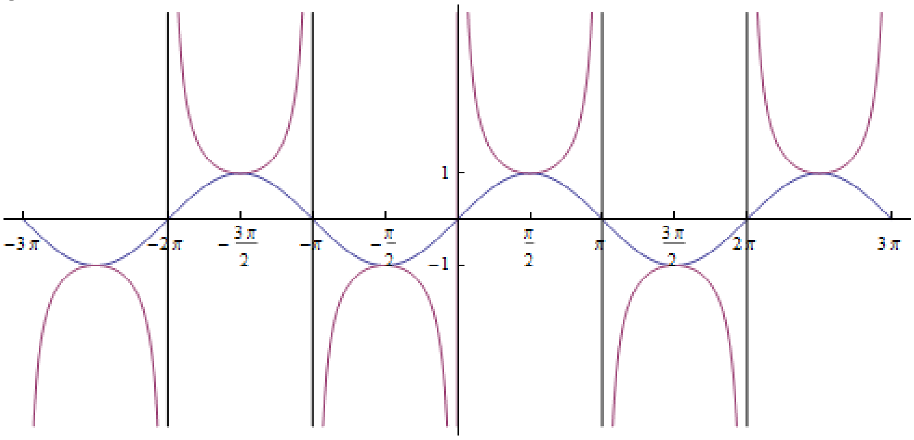
Proprietăţi ale funcţiei sec:

- este funcţie pară: $\sec(-x) = \sec x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
- grafic:



Proprietăţi ale funcţiei cosec:

- este funcţie impară: $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$
- este funcţie periodică de perioadă 2π:
- este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
- grafic:



1.3 Formule trigonometrice

Folosind formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

se obţin următoarele relaţii între pătratele funcţiilor trigonometrice:

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{ctg}^2 x$
$\sin^2 x$	$\sin^2 x$	$1 - \cos^2 x$	$\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$	$\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$
$\operatorname{tg}^2 x$	$\dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	$\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg}^2 x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$
$\operatorname{ctg}^2 x$	$\dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\dfrac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$	$\operatorname{ctg}^2 x$

Formulele funcţiilor trigonometrice ale sumei şi diferenţei:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1.1}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{1.2}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1.3}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{1.4}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{1.5}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{1.6}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} \tag{1.7}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \tag{1.8}$$

Consecinţe ale formulelor pentru sumă:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \tag{1.9}$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = -2\sin^2 x \tag{1.10}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} \tag{1.11}$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \tag{1.12}$$
$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1} \tag{1.13}$$

Din formulele pentru $\cos 2x$ obţinem

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{1.14}$$

Înlocuind x cu $\frac{x}{2}$ găsim

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \qquad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \tag{1.15}$$
$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \tag{1.16}$$

Adunând şi scăzând formulele pentru sumă şi diferenţă găsim:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

Notăm $\alpha + \beta = x,\ \alpha - \beta = y$. Atunci $\alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2}$ şi avem:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{1.17}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{1.18}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{1.19}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \tag{1.20}$$

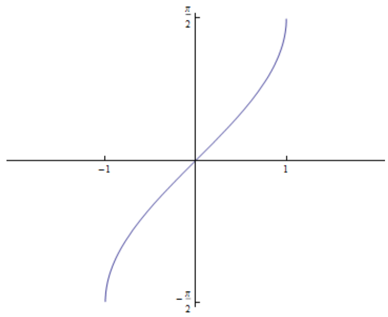
1.4 Funcţii trigonometrice inverse

1. Restricţia funcţiei sin la intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Proprietăţi ale funcţiei arcsin:

- $\arcsin(\sin x) = x,\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\arcsin x) = x,\ \forall x \in [-1, 1]$
- monoton crescătoare şi impară: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- continuă şi derivabilă: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- grafic:



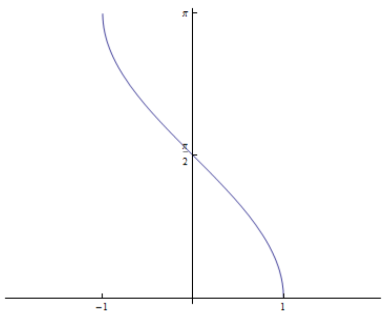
2. Restricţia funcţiei cos la intervalul $[0, \pi]$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Proprietăţi ale funcţiei arccos:

- $\arccos(\cos x) = x,\ \forall x \in [0, \pi]$, $\cos(\arccos x) = x,\ \forall x \in [-1, 1]$

- monoton descrescătoare şi $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- continuă şi derivabilă: $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- grafic:

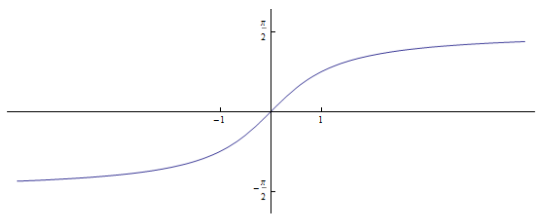


3. Restricţia funcţiei tg la intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Proprietăţi ale funcţiei arctg:

- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- monoton crescătoare şi impară: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
- continuă şi derivabilă: $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- grafic:



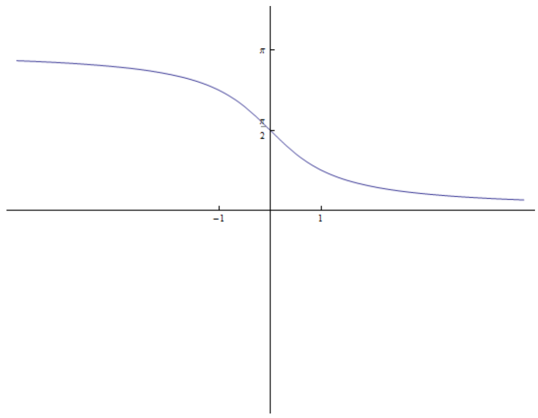
4. Restricţia funcţiei ctg la intervalul $(0, \pi)$ este bijectivă, deci inversabilă. Definim funcţia inversă

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Proprietăţi ale funcţiei arcctg:

- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \ \forall x \in (0, \pi), \ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- monoton descrescătoare şi $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

- continuă şi derivabilă: $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- grafic:



5. Relaţii între funcţiile trigonometrice şi inversele lor:

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\dfrac{1}{x}$
ctg	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{x}$	x

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{1.21}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \tag{1.22}$$

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \tag{1.23}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{1.24}$$

1.5 Ecuaţii şi inecuaţii trigonometrice

1. ecuaţia $\sin x = a$
   dacă $|a| \le 1 \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,\ k \in \mathbb{Z}$
   dacă $|a| > 1 \Rightarrow$ nu există soluţii

2. inecuaţia $\sin x > a$
   dacă $a \ge 1 \Rightarrow$ nu există soluţii

dacă $a < -1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
dacă $-1 \le a < 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi + \arcsin a, (2k+1)\pi - \arcsin a)$$

3. inecuaţia $\sin x < a$
dacă $a \le -1 \Rightarrow$ nu există soluţii
dacă $a > 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
dacă $-1 < a \le 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ((2k-1)\pi - \arcsin a, 2k\pi + \arcsin a)$$

4. ecuaţia $\cos x = a$
dacă $|a| \le 1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos a,\ k \in \mathbb{Z}$
dacă $|a| > 1 \Rightarrow$ nu există soluţii

5. inecuaţia $\cos x > a$
dacă $a \ge 1 \Rightarrow$ nu există soluţii
dacă $a < -1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
dacă $-1 \le a < 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi - \arccos a, 2k\pi + \arccos a)$$

6. inecuaţia $\cos x < a$
dacă $a \le -1 \Rightarrow$ nu există soluţii
dacă $a > 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}$
dacă $-1 < a \le 1 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi + \arccos a, 2(k+1)\pi - \arccos a)$$

7. ecuaţia $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg} a,\ k \in \mathbb{Z}$

8. inecuaţia $\operatorname{tg} x > a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi + \operatorname{arctg} a, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

9. inecuaţia $\operatorname{tg} x < a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \operatorname{arctg} a\right)$$

10. ecuaţia $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arcctg} a,\ k \in \mathbb{Z}$

11. inecuaţia $\operatorname{ctg} x > a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, k\pi + \operatorname{arcctg} a)$$

12. inecuaţia $\operatorname{ctg} x < a \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi + \operatorname{arcctg} a, k\pi + \pi)$$

1.6 Exerciţii

1. Să se găsească formulele de transformare dintre unităţile de măsură pentru unghiuri.

   Rezolvare:

   Formulele de transformare dintre unităţile de măsură pentru unghiuri se bazează pe exprimarea unghiului drept:

$$\frac{\pi}{2} rad = 90^0 = 100^g$$

- $1^0 = \left(\frac{100}{90}\right)^g \simeq 1,1111^g = 1^g 11^c 11^{cc}$
  $1' = \frac{1}{60} \cdot \left(\frac{100}{90}\right)^g \simeq 0,0186^g = 1^c 86^{cc}$
  $1'' = \frac{1}{3600} \cdot \left(\frac{100}{90}\right)^g \simeq 0,0003^g = 3^{cc}$
- $1^g = \left(\frac{90}{100}\right)^0 = 0,9^0 = 0,9 \cdot 60' = 54'$
  $1^c = \frac{1}{100} \cdot 0,9^0 = 0,54' = 0,54 \cdot 60'' = 32,4''$
  $1^{cc} = \frac{1}{100} \cdot 32,4'' = 0,324''$
- $1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 = 57,295779^0 = 57^0 + 0,295779 \cdot 60' = 57^0 17,74674' =$
  $= 57^0 17' + 0,74674 \cdot 60'' = 57^0 17' 44,8'' \simeq 57^0 17' 45''$
- $1 rad = \left(\frac{200}{\pi}\right)^g \simeq 63,6620^g = 63^g 66^c 20^{cc}$
- $1^0 = \frac{\pi}{180} rad \simeq 0,017453 rad$
- $1^g = \frac{\pi}{200} rad \simeq 0,0157078 rad$

2. Să se efectueze următoarele operaţii cu grade, minute şi secunde sexagesimale:

   a) $12^0 35' 44'' + 25^0 45' 52'' = 38^0 21' 36''$
   $44'' + 52'' = 96'' = 1' 36''$
   $35' + 45' + 1' = 81' = 1^0 21'$
   $12^0 + 25^0 + 1^0 = 38^0$

   b) $15^0 43' 38'' \times 3 = 47^0 10' 54''$
   $38'' \times 3 = 114'' = 1' 54''$
   $43' \times 3 + 1' = 130' = 2^0 10'$
   $15^0 \times 3 + 2^0 = 47^0$

   c) $125^0 37' 15'' : 3 = 41^0 52' 25''$
   $125^0 : 3 = 41^0$ rest $2^0 = 120'$
   $120' + 37' = 157' : 3 = 52'$ rest $1' = 60''$
   $60'' + 15'' = 75'' : 3 = 25''$

3. Să se calculeze valorile funcţiilor trigonometrice ale altor unghiuri uzuale (valori exprimate prin radicali):

   a) $\sin 15^0 = \sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
   $\cos 15^0 = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

   b) $\sin^2(22^0 30') = \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$
   $\cos^2(22^0 30') = \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
   $\operatorname{tg}(22^0 30') = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$; $\operatorname{ctg}(22^0 30') = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$

   c) funcţiile trigonometrice ale unghiului de $18^0 = \frac{\pi}{10}$:
   $\sin 72^0 = 2 \sin 36^0 \cos 36^0 = 4 \sin 18^0 \cos 18^0 (1 - 2 \sin^2 18^0)$;
   $\sin 72^0 = \sin(90^0 - 18^0) = \cos 18^0$. Egalând cele 2 identităţi şi împărţind prin $\cos 18^0 > 0$ obţinem ecuaţia în necunoscuta $u = \sin 18^0$:

   $$1 = 4u(1 - 2u^2) \Leftrightarrow 8u^3 - 4u + 1 = 0 \Leftrightarrow (2u - 1)(4u^2 + 2u - 1) = 0$$

   care are rădăcinile $u_1 = \frac{1}{2} = \sin 30^0 > \sin 18^0$, $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} > 0$ şi $u_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0$, aşadar $\sin 18^0 = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. De aici rezultă $\cos 18^0 = \cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2 18^0} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, apoi $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ şi $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

d) $\sin 36^0 = \sin\frac{\pi}{5} = 2\sin 18^0\cos 18^0 = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$;

$\cos 36^0 = \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\sin^2 36^0} = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$;

$\operatorname{tg} 36^0 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg} 36^0 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

e) $\sin 54^0 = \sin(90^0-36^0) = \cos 36^0 = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$

$\cos 54^0 = \cos(90^0-36^0) = \sin 36^0 = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\operatorname{tg} 54^0 = \operatorname{ctg} 36^0 = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\operatorname{ctg} 54^0 = \operatorname{tg} 36^0 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

Analog rezultă valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile $67^0 30'$, 72^0, 75^0. Aceste valori pot fi puse în următorul tabel:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	∞
$15^0 = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^0 = \frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$22^0 30' = \frac{\pi}{8}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$30^0 = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$36^0 = \frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$
$45^0 = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$54^0 = \frac{3\pi}{10}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$60^0 = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$67^0 30' = \frac{3\pi}{8}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$72^0 = \frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$
$75^0 = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^0 = \frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

4. Să se calculeze funcţiile trigonometrice pentru următoarele valori:

$$\frac{7\pi}{6};\ \frac{9\pi}{4};\ \frac{14\pi}{3};\ -\frac{9\pi}{2};\ \frac{2015\pi}{2};\ \frac{2015\pi}{3};\ \frac{2015\pi}{4};\ \frac{2015\pi}{6}$$

5. Să se rezolve următoarele ecuaţii trigonometrice:

a) $\cos 2x + 4\sin x - 1 = 0$
R: Înlocuim în ecuaţie $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ şi obţinem

$$1 - 2\sin^2 x + 4\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(2 - \sin x) = 0$$

Cum $\sin x \le 1 \Rightarrow 2 - \sin x \ge 0$ deci singura soluţie acceptabilă este $\sin x = 0$ de unde obţinem $x = k\pi + (-1)^k \arcsin 0, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0,\ \ x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$
R: Folosind formulele care exprimă $\sin^2 x$ şi $\operatorname{ctg}^2 x$ în funcţie de $\cos^2 x$ obţinem

$$\sqrt{2}\cos x + 2(1 - \cos^2 x) + \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} - 3 = 0$$

Punând $t = \cos x$, în urma calculelor se obţine

$$2t^4 - \sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t^3 + 1) = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4};\ t_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$$

c) $4\sin x + 2\cos x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$
R: Facem substituţia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Avem $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ şi $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$. După efectuarea calculelor se obţine ecuaţia

$$2t^4 - 7t^3 - 2t^2 + t = 0$$

care are rădăcinile $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\left(2 + \sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\left(2 - \sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

d) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$
R: Împărţind prin $\sqrt{3}$ obţinem $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Punem $\frac{1}{\sqrt{3}} =$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6}$ de unde folosind formula pentru sinusul sumei găsim $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, aşadar

$$x + \frac{\pi}{6} = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi + \left((-1)^k - 1\right)\frac{\pi}{6}$$

e) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
R: Împărţind prin $\cos^2 x \neq 0$ şi punând $t = \operatorname{tg} x$ obţinem ecuaţia

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$t_1 = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg}(-1) = k\pi - \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$
$t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

f) $2\sin^4 x - 2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x + 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos^3 x - 2\cos^4 x = 1$
R: Înlocuind în membrul drept $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ ecuaţia devine:

$$2\sin^4 x - 2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x + 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos^3 x - 2\cos^4 x = $$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \Rightarrow$$
$$\sin^4 x - 2\sqrt{3}\sin^3 x\cos x + 2\sin^2 x\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos^3 x - 3\cos^4 x = 0$$

Împărţind prin $\cos^4 x$ şi notând $t = \operatorname{tg} x$ obţinem

$$t^4 - 2\sqrt{3}t^3 + 2t^2 + 2\sqrt{3} - 3 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 - 2\sqrt{3} + 3) = 0$$

$t_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$
$t_{3,4} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

g) $5(\sin x + \cos x) - 2\sin 2x = 4$
R: Facem substituţia $u = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin 2x = u^2 - 1$. Se obţine ecuaţia $2u^2 - 5u + 2 = 0$ cu rădăcinile reale $u_1 = 2,\ u_2 = \frac{1}{2}$.
$u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow$ nu există soluţii;
$u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4}$.

h) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x = 1$
R: $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2x - \cos 6x = 1 - \cos 4x$. Folosind formulele de transformare a diferenţei şi sumei în produs găsim $-2\sin 4x\sin 2x = 2\sin^2 2x \Rightarrow 2\sin 2x(\sin 4x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x\sin 3x\cos x = 0$
$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, mulţime de soluţii care este inclusă în prima mulţime.

i) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) + \sin^4 x + \cos^4 x = 1$
R: Cu substituţia $y = \sin 2x$ avem $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}y^2$, $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}y^2$, iar ecuaţia devine $2\left(1 - \frac{3}{4}y^2\right) + 1 - \frac{1}{2}y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1$ cu rădăcinile $y = \pm 1$.
$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$;
$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

j) $\cos x \cos 7x = \cos 3x \cos 5x$
R: Transformând cele două produse în sume avem

$$\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 6x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 4x \sin 2x = 0$$

$\sin 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$
$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, mulţime de soluţii care este inclusă în prima mulţime.

k) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = m$; discuţie după $m \in \mathbb{R}$

l) $2\cos^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1$

m) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$

n) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

o) $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4}$

Capitolul 2

Complemente de trigonometrie

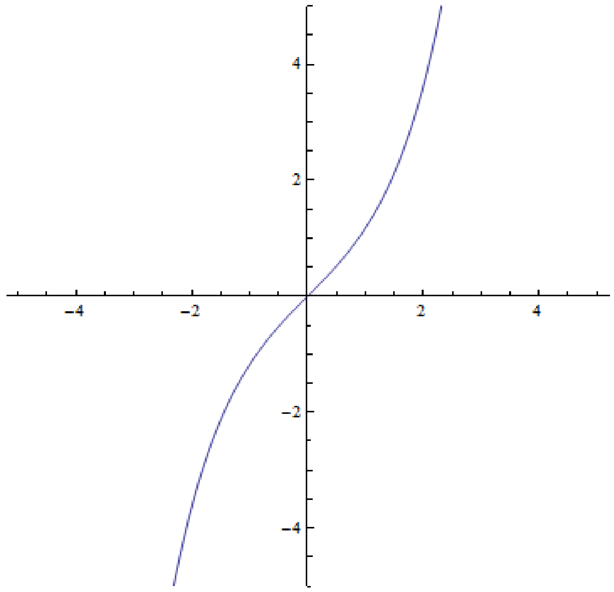
2.1 Funcţii hiperbolice

Funcţia

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

se numeşte **sinus hiperbolic**.

Este impară, bijectivă şi are graficul:

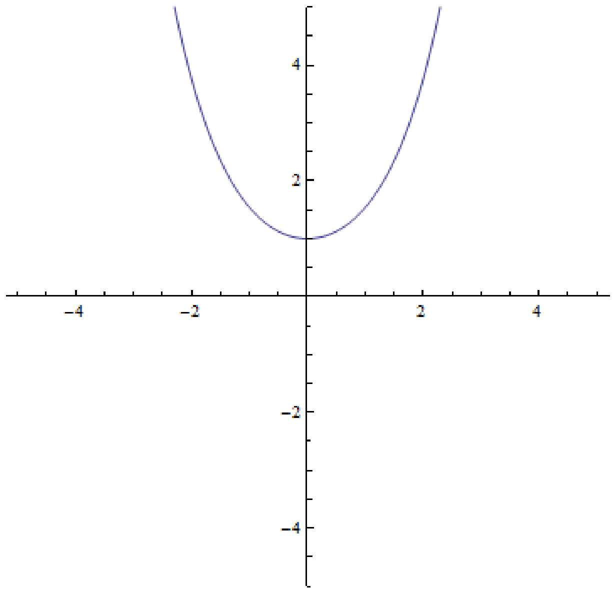


Funcţia

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

se numeşte **cosinus hiperbolic**.

Este pară şi are graficul:



Valorile $\operatorname{ch} t$ şi $\operatorname{sh} t$ sunt coordonatele punctelor de pe hiperbola echilateră unitară de ecuaţie

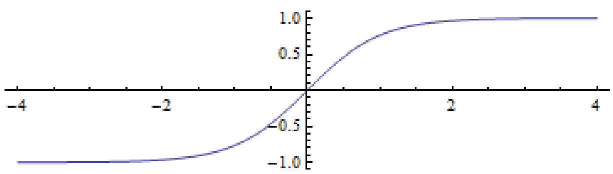
$$x^2 - y^2 = 1.$$

Funcţia

$$\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

se numeşte **tangentă hiperbolică**.

Este impară şi are graficul:

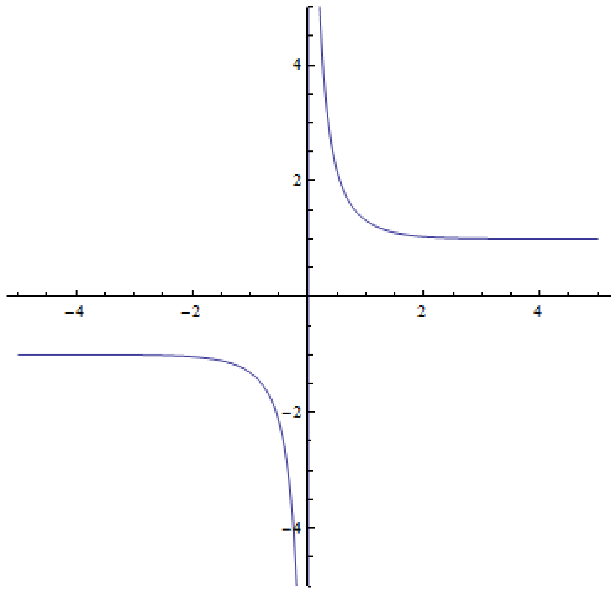


Funcţia

$$\operatorname{cth} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

se numeşte **cotangentă hiperbolică**.

Este impară şi are graficul:



Formule pentru funcţiile hiperbolice:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \tag{2.2}$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \tag{2.3}$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \tag{2.4}$$

$$\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y} \tag{2.5}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \tag{2.6}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \tag{2.7}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \tag{2.8}$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2} \tag{2.9}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2} \tag{2.10}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2} \tag{2.11}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y} \tag{2.12}$$

Funcţia sh este bijectivă pe $\mathbb{R}$, deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

se numeşte **argument sinus hiperbolic**.

Restricţia cosinusului hiperbolic $\text{ch} : (-\infty, 0] \to [1, \infty)$ este bijectivă deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\text{argch}_- : [1, \infty) \to (-\infty, 0],\ \text{argch}_- x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

se numeşte **argument negativ cosinus hiperbolic**.

Restricţia cosinusului hiperbolic $\text{ch} : [0, \infty) \to [1, \infty)$ este bijectivă deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\text{argch}_+ : [1, \infty) \to [0, \infty),\ \text{argch}_+ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

se numeşte **argument pozitiv cosinus hiperbolic**.

Funcţia $\text{th} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ este bijectivă, deci inversabilă. Funcţia inversă

$$\text{argth} : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ \text{argth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

se numeşte **argument tangentă hiperbolică**.

Funcţiile hiperbolice şi inversele lor sunt derivabile pe domeniile lor de definiţie şi derivatele lor sunt:

$$(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x;\ (\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x \tag{2.13}$$

$$(\text{th}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x};\ (\text{cth}\, x)' = \frac{1}{\text{sh}^2 x} \tag{2.14}$$

$$(\text{argsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \tag{2.15}$$

$$(\text{argch}_+ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},\ x > 1 \tag{2.16}$$

$$(\text{argth}\, x)' = \frac{1}{1 - x^2},\ |x| < 1 \tag{2.17}$$

Dezvoltările în serii de puteri ale funcţiilor hiperbolice sunt:

$$\text{sh}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

$$\text{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

2.2 Serii trigonometrice

O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există $T \neq 0$ astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Exemplu: funcţiile sin şi cos au perioadele $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cea mai mică perioadă pozitivă $T > 0$ se numeşte *perioadă principală*.

Dacă funcţia $f(x)$ este periodică de perioadă T, atunci funcţia $g(x) = f(\alpha x)$ este periodică de perioadă $\frac{T}{\alpha}$:

$$g\left(x + \frac{T}{\alpha}\right) = f\left(\alpha\left(x + \frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x) = g(x)$$

Funcţiile $\sin x$ şi $\cos x$ sunt periodice de perioadă principală 2π, funcţiile $\sin nx$ şi $\cos nx$ au perioada $\frac{2\pi}{n}$, iar perioada comună a funcţiilor

$$\{\sin n\omega x, \cos n\omega x; n \in \mathbb{N}\}$$

este $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă T, integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci:

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Definiţia 2.1. *Se numeşte* ***serie trigonometrică*** *o serie de funcţii de forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \tag{2.20}$$

unde $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

Teorema 2.1. *Dacă seria* (2.20) *este convergentă (respectiv absolut convergentă sau uniform convergentă) pe un interval compact oarecare de lungime* $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *atunci este convergentă (absolut convergentă sau uniform convergentă) pe* $\mathbb{R}$ *iar suma ei este o funcţie periodică de perioadă* T.

Conform criteriului Dirichlet, dacă şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt monoton convergente la 0, atunci seria este convergentă pentru orice $x \neq nT$, $n \in \mathbb{Z}$ şi uniform convergentă pe orice interval compact care nu conţine puncte de această formă.

Teorema 2.2. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă pe* $\mathbb{R}$, *periodică de perioadă* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *care poate fi reprezentată printr-o serie trigonometrică*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x).$$

Atunci coeficienţii a_0, a_n, b_n *sunt daţi de formulele*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\cos n\omega x dx, \ n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\sin n\omega x dx, \ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Integralele nu depind de α şi de obicei se alege $\alpha = 0$ sau $\alpha = -\frac{T}{2}$.

Pentru valorile lui α anterioare, dacă notăm $T = 2l \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$, formulele (2.21) devin:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

sau

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Formulele (2.21)-(2.23) se numesc **formulele Euler-Fourier**, iar seria trigonometrică corespunzătoare se numeşte **serie Fourier trigonometrică** asociată funcţiei f.

Pentru demonstraţia formulelor Euler-Fourier se calculează mai întâi integralele:

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0,\ \forall n = 1,2,\ldots$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0,\ \forall n = 1,2,\ldots$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\tfrac{m\pi x}{l}\cos\tfrac{n\pi x}{l}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\tfrac{(m+n)\pi x}{l} + \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\tfrac{(m-n)\pi x}{l} = 0$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\tfrac{m\pi x}{l}\sin\tfrac{n\pi x}{l}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m-n)\pi x}{l} - \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m+n)\pi x}{l} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ l, m = n \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{m\pi x}{l}\cos\tfrac{n\pi x}{l}dx = \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m-n)\pi x}{l} + \tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{(m+n)\pi x}{l} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ l, m = n \end{cases}$$

Înlocuind în integralele din (2.23) pe $f(x)$ cu seria trigonometrică (2.20) şi integrând termen cu termen se obţin coeficienţii $a_0, a_n, b_n,\ n = 1,2,\ldots$.

Dacă funcţia f periodică de perioadă $T = 2l$ este pară, coeficienţii Fourier sunt

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \\ a_n &= \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \\ b_n &= 0,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.24}$$

iar seria Fourier trigonometrică este numai de cosinusuri:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Dacă funcţia f periodică de perioadă $T = 2l$ este impară, coeficienţii Fourier sunt

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0,\ n \geq 1 \\ b_n &= \tfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{l}dx,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.25}$$

iar seria Fourier trigonometrică este numai de sinusuri:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

O funcţie f definită pe un interval de lungime $2l$ se poate prelungi pe $\mathbb{R}$ la o funcţie periodică $\tilde{f}$ de perioadă $T = 2l$ astfel încât $\tilde{f}(x) = f(x)$ pe intervalul pe care este definită f. Astfel se poate asocia o serie Fourier trigonometrică şi unei funcţii neperiodice definite pe un interval, suma acestei serii fiind o funcţie periodică de perioadă egală cu lungimea intervalului pe care este definită f.

O funcţie f definită pe un interval $[0, l]$ se poate prelungi la o funcţie pară pe intervalul $[-l, l]$ punând $f(-x) = f(x),\ \forall x \in [0, l]$, iar apoi aceasta se poate prelungi la o funcţie periodică de perioadă $T = 2l$. Acestei funcţii i se poate asocia o serie Fourier trigonometrică numai de cosinusuri.

O funcţie f definită pe un interval $[0, l]$ se poate prelungi la o funcţie impară pe intervalul $[-l, l]$ punând $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [0, l]$, iar apoi aceasta se poate prelungi la o funcţie periodică de perioadă $T = 2l$. Acestei funcţii i se poate asocia o serie Fourier trigonometrică numai de sinusuri.

2.3 Numere complexe sub formă trigonometrică

Definiţia 2.2. *Un* ***număr complex*** *se defineşte ca o pereche ordonată de numere reale* $z = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R}$*, unde* a *se numeşte* ***partea reală****, iar* b *-* ***partea imaginară*** *a numărului complex* z*, notate cu* $a = \operatorname{Re} z,\ b = \operatorname{Im} z$*. Mulţimea numerelor complexe se notează cu* $\mathbb{C}$*.*

Fie $z_1 = (a_1, b_1),\ z_2 = (a_2, b_2),\ z = (a, b) \in \mathbb{C}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Egalitatea a două numere complexe:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ şi } b_1 = b_2.$$

Adunarea:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Este asociativă, comutativă, are elementul neutru $(0, 0)$, iar fiecare număr complex z are opusul $-z = (-a, -b)$, aşadar $(\mathbb{C}, +)$ este grup comutativ.

Înmulţirea cu scalari:

$$\alpha \cdot z = (\alpha a, \alpha b).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial real de dimensiune 2, deci izomorf cu $\mathbb{R}^2$, iar baza canonică este formată din numerele complexe $1 = (1, 0)$ (*unitatea reală*) şi $i = (0, 1)$ (*unitatea imaginară*). În raport cu această bază avem

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi$$

care se numeşte **forma algebrică a unui număr complex**.

Numerele de forma $(a, 0) = a + 0i = a$ se identifică cu numerele reale. Astfel, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Numerele de forma $(0, b) = 0 + bi = bi$ se numesc *pur imaginare*.

Înmulţirea numerelor complexe:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Este asociativă, comutativă, are elementul neutru $(1, 0)$, iar fiecare număr complex $z \neq 0$ are inversul $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$, aşadar $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ. Cum $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, operaţiile în acest corp devin asemănătoare cu operaţiile cu polinoame:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i
\end{aligned}$$

Numărul complex $\bar{z} = a - bi$ se numeşte *conjugatul* lui $z = a + bi$.

Numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numeşte *modulul* lui $z = a + bi$.

Are loc relaţia $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Împărţirea a două numere complexe se face prin amplificarea cu conjugatul numitorului:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \text{ pentru } z_2 \neq 0.$$

Alte proprietăţi ale numerelor complexe:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \tag{2.26}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \tag{2.27}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \ (z_2 \neq 0) \tag{2.28}$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \tag{2.29}$$

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \ \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2i}(z - \bar{z}) \tag{2.30}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z \tag{2.31}$$

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \ \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \tag{2.32}$$

$$|\bar{z}| = |-z| = |z| \tag{2.33}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{2.34}$$

$$\left|\tfrac{z_1}{z_2}\right| = \tfrac{|z_1|}{|z_2|} \tag{2.35}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{2.36}$$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \ |\operatorname{Im} z| \leq |z| \tag{2.37}$$

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \tag{2.38}$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \tag{2.39}$$

Numerele complexe pot fi reprezentate prin puncte în plan astfel: punctul $M(x, y)$ se numeşte *imaginea geometrică* a numărului complex $z = x + yi$ şi invers, numărul complex $z = x + yi$ se numeşte *afixul* punctului $M(x, y)$.

Numerelor reale corespund puncte de pe axa Ox (numită *axă reală*), iar numerelor pur imaginare corespund puncte de pe axa Oy (numită *axă imaginară*)

Folosind coordonatele polare ale punctelor din plan $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ obţinem **forma trigonometrică** a numerelor complexe:

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ este chiar *modulul* lui z, iar $\theta \in [0, 2\pi)$ (cu $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$) se numeşte *argumentul* lui z şi se notează cu $\arg z$

Folosind *formula lui Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

se obţine **forma exponenţială** a numerelor complexe $z = \rho e^{i\theta}$.

Avem $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, deci $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

Pentru adunarea şi scăderea numerelor complexe se poate folosi regula paralelogramului pentru vectorii de poziţie corespunzători imaginilor acestor numere complexe.

Distanţa dintre imaginile a două numere complexe este egală cu modulul diferenţei dintre aceste numere:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Pentru înmulţirea şi împărţirea numerelor complexe se pot folosi formele trigonometrice sau exponenţiale. Dacă $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \rho_1 e^{i\theta_1}$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \rho_2 e^{i\theta_2}$ atunci:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\
&= \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \\
&= \rho_1 e^{i\theta_1}\cdot\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}$$

Formula lui Moivre:

$$z^n = \left[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

Consecinţe ale formulei lui Moivre:

- Ecuaţia binomă $z^n = a$, unde $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \in \mathbb{C}$ are rădăcinile complexe
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2.40}$$
- Pentru $a = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ se obţine
$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \dots, n-1$$
care se numesc *rădăcinile de ordinul n ale unităţii.*
- Rădăcinile din (2.40) pot fi rescrise
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$
aşadar se obţin dintr-o rădăcină a ecuaţiei binome prin înmulţire cu rădăcinile de ordinul n ale unităţii.

2.4 Funcţiile trigonometrice în complex

Funcţii elementare în complex:

1. *Funcţia polinomială în complex*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \;\; a_k \in \mathbb{C}, k = 0, \ldots, n$$

2. *Funcţia raţională în complex*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0},$$

$a_j, b_k \in \mathbb{C}, j = \overline{0, m}, k = \overline{0, n}$

3. *Funcţia radical în complex* $\sqrt[n]{z}$ se defineşte ca fiind inversa funcţiei putere z^n. Folosind (2.40) avem:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \;\; k = \overline{0, n-1}.$$

Funcţia radical în complex este o *funcţie multivalentă (multiformă)* cu n valori (ramuri de funcţie). Pentru $k = 0$ se obţine *determinarea principală* a funcţiei radical.

4. *Funcţia exponenţială în complex*:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Proprietăţi:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$ (funcţie periodică de perioadă $2\pi i$)
- $|e^z| = e^x$ şi $\arg(e^z) = y$ pentru $z = x + iy$

5. *Funcţia logaritmică în complex* se defineşte ca fiind inversa funcţiei exponenţiale: $z = e^w \Leftrightarrow w = \ln z$.
Dacă $w = u + iv$ şi $z = \rho e^{i\theta}$ (unde $\rho = |z|$ şi $\theta = \arg(z)$) atunci:
$e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = z = \rho \cdot e^{i\theta} \Rightarrow e^u = \rho$ şi $v = \theta + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\,(\arg z + 2k\pi)\,, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Logaritmul complex este o funcţie multivalentă (multiformă) cu o infinitate de ramuri de funcţie. Pentru $k = 0$ se obţine *determinarea principală* a funcţiei logaritm. Proprietăţi:

- $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
- $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$
- $\ln(z^n) = n \ln z$
- $\ln\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{1}{n} \ln z$

6. *Puterea complexă a unui număr complex*:

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \ (\alpha \in \mathbb{C}).$$

7. *Funcţiile trigonometrice şi hiperbolice în complex* se definesc cu ajutorul funcţiei exponenţiale şi prelungesc în complex funcţiile corespunzătoare reale:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \sin z = \tfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \tag{2.41}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \quad \operatorname{sh} z = \tfrac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \tag{2.42}$$

Proprietăţi:

- $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$ şi $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ şi $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
- $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$
- $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$
- Funcţiile trigonometrice sin şi cos sunt periodice de perioadă 2π, iar funcţiile hiperbolice sh şi ch sunt periodice de perioadă $2\pi i$
- Funcţiile cos şi ch sunt pare, iar funcţiile sin şi sh sunt impare
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$ şi $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$

Se pot defini şi funcţiile $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

8. *Funcţiile inverse trigonometrice şi inverse hiperbolice în complex* se definesc cu ajutorul funcţiei logaritmice în complex:

- $\arcsin z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$
- $\arccos z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

- $\operatorname{arctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{i-z}{i+z}$
- $\operatorname{arcctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{z+i}{z-i}$
- $\operatorname{argsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$
- $\operatorname{argch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$
- $\operatorname{argth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+z}{1-z}$
- $\operatorname{argcth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{z-1}$

2.5 Exerciţii

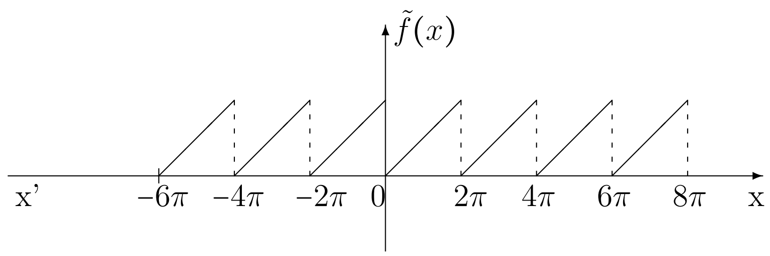
1. Să se găsească seria Fourier a funcţiei

$$f(x) = x,\ 0 \le x \le 2\pi,$$

periodică, de perioadă 2π.

Rezolvare.

Prelungind funcţia $f(x)$ prin periodicitate, construim funcţia $\tilde{f}(x)$, definită pe $\mathbb{R}$ minus punctele $x_n = 2n\pi,\ (n \in \mathbb{Z})$, care sunt discontinuităţi de speţa întâia pentru această funcţie. Graficul său, pentru un număr finit de perioade, este următorul:



Avem: $\tilde{f}(2k\pi - 0) = 2\pi,\ \tilde{f}(2k\pi + 0) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

Calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] = 0,\ n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] = -\frac{2}{n},\ n \in \mathbb{N}$$

Avem,

$$f(x) \to \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z} \\ \pi & \text{pentru } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

adică seria Fourier este convergentă către ordonatele graficului funcţiei $\tilde{f}(x)$ în orice punct de continuitate a acestei funcţii şi are suma egală cu media aritmetică a limitelor laterale ale funcţiei $\tilde{f}(x)$, în toate punctele sale de discontinuitate. Pe intervalele $(2n\pi, 2(n+1)\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ convergenţa seriei este chiar uniformă către $\tilde{f}(x)$.

Din precedentele rezultă formula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},\ x \in (0, 2\pi), \tag{2.43}$$

care dă suma seriei trigonometrice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ pentru orice valoare a lui x din intervalul $(0, 2\pi)$.

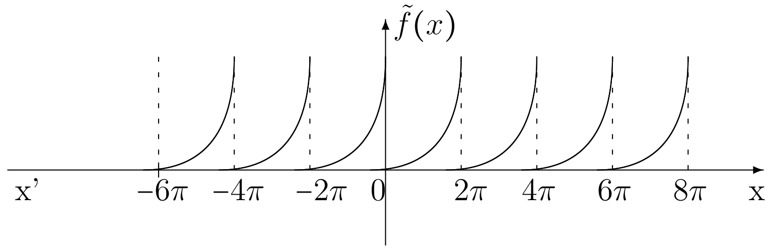
2. Să se găsească seria Fourier a funcţiei

$$f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 2\pi,$$

funcţia fiind periodică de perioadă $T = 2\pi$, să se precizeze apoi suma seriei pentru $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare.

Graficul funcţiei $f(x)$ este următorul:



Avem: $\tilde{f}(2k\pi - 0) = 4\pi^2$, $\tilde{f}(2k\pi + 0) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2},\ n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n},\ n = 1, 2, \ldots$$

Rezultă atunci:

$$f(x) \to \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases}\tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq 2k\pi\\ 2\pi^2 & \text{pentru } x = 2k\pi\end{cases}, k \in \mathbb{Z} \tag{2.44}$$

Ca o consecinţă a acestei dezvoltări, obţinem pentru $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

De asemenea, înlocuind (2.43) în (2.44) se obţine suma primei serii din dezvoltarea de mai sus sub forma

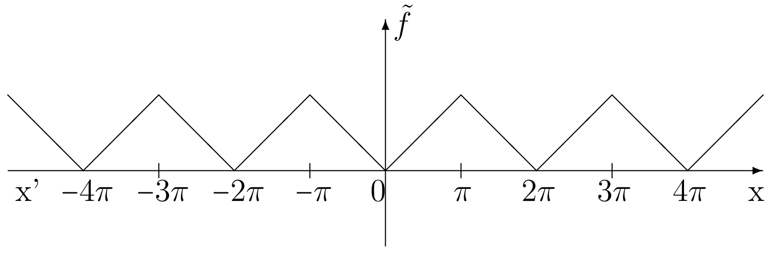
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12},\ 0 \le x \le 2\pi, \tag{2.45}$$

egalitatea fiind valabilă chiar pentru $x = 0$ şi $x = 2\pi$, deoarece prelungirea funcţiei din membrul drept al egalităţii (2.45) este continuă pentru $x \in \mathbb{R}$ (ea ia valori egale cu $\pi^2/6$ la capetele intervalului $[0, 2\pi]$).

3. Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri funcţia $f(x) = |x|, 0 \le x \le \pi$, periodică, de perioadă 2π.

   Rezolvare.

   Prelungim mai întâi funcţia prin paritate pe intervalul $[-\pi, 0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa. Se obţine o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, pe care o notăm cu $\tilde{f}$ şi al cărui grafic este următorul:



Avem:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ par} \\ \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

Prin urmare,

$$\begin{cases} a_{2n} = 0, \ n = 1, 2, \ldots \\ a_{2n-1} = \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2}, \ n = 1, 2, \ldots \\ b_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

rezultă că,

$$|x| \to \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \tilde{f}(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Din această dezvoltare rezultă că putem scrie egalitatea:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \ -\pi \le x \le \pi. \tag{2.46}$$

Egalitatea (2.46) are loc şi în punctele $x = \pi$ şi $x = -\pi$, în virtutea continuităţii funcţiei. Seria obţinută este absolut şi uniform convergentă pentru $x \in \mathbb{R}$, concluzie ce rezultă atât din criteriul lui Dirichlet cât şi prin aplicarea criteriului lui Weierstrass, comparând seria dată cu seria Riemann $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$, care este convergentă.

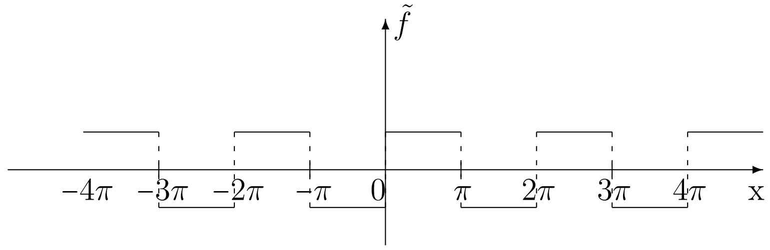
4. Să se dezvolte în serie Fourier de sinusuri, funcţia $f(x) = 1, \ 0 \le x \le \pi$, periodică, de perioadă 2π.

   Rezolvare.

   Rezolvarea problemei constă în a prelungi mai întâi funcţia dată prin imparitate pe intervalul $[-\pi, 0]$, obţinând

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } -\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{pentru } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinând în final funcţia $\tilde{f}(x)$, al cărei grafic are următorul aspect:



După această operaţie, calculăm coeficienţii corespunzători funcţiei impare date:

$$a_n = 0,\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right],$$

de unde rezultă,

$$b_{2n} = 0,\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)},\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Rezultă că avem

$$f(x) \to \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq k\pi \\ 0 & \text{pentru } x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Această serie este chiar uniform convergentă pe toate subintervalele aparţinând intervalelor $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Din dezvoltarea precedentă mai rezultă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4},\ 0 < x < \pi.$$

Acest rezultat este interesant prin faptul că suma seriei este constantă, cu toate că seria este o serie de funcţii.

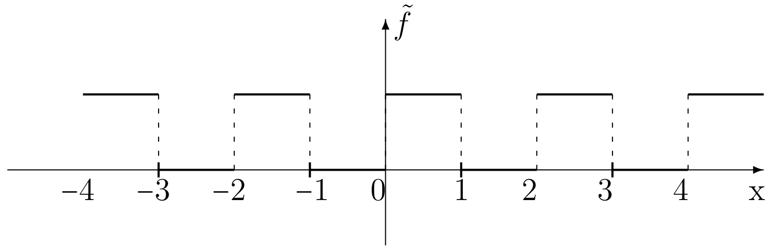
5. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dacă } -1 < x < 0 \end{cases},$$

a cărei perioadă este $T = 2$.

Rezolvare.

Graficul funcţiei prelungite este de forma prezentată în figura alăturată



Acum calculăm coeficienţii Fourier corespunzători pentru $l = 1$ şi ţinând seama că $f(x) = 0$ pe intervalul $[-1, 0]$:

$$a_0 = \int_0^1 dx = 1;$$

$$a_n = \int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^1 = 0, \ (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \int_0^1 \sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

de unde rezultă

$$b_{2n} = 0, \ b_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)}, \ (n = 1, 2, \dots).$$

Prin urmare,

$$f(x) \to \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{pentru } x \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } x = k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

De aici mai rezultă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \ 0 < x < 1,$$

din care pot fi obţinute pentru valori particulare ale lui x sumele unor serii alternate.

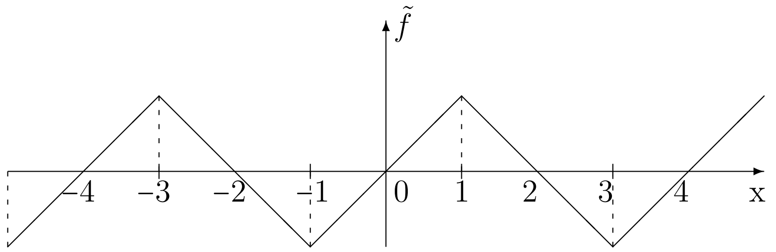
6. Să se dezvolte în serie de sinusuri funcţia periodică

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{pentru } 1 < x \le 2 \end{cases},$$

perioada sa fiind $T = 2l = 4$, $(l = 2)$.

Rezolvare.

Prelungind prin imparitate funcţia $f(x)$ pe intervalul $[-2, 0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinem funcţia continuă $f(x)$, al cărei grafic are următorul aspect:



Suma seriei Fourier corespunzătoare va coincide cu $\tilde{f}(x)$ pe $\mathbb{R}$, seria fiind absolut şi uniform convergentă (după cum se va putea constata aplicându-i criteriul lui Weierstrass).

Funcţia $f(x)$ fiind impară, rezultă $a_n = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$, iar

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{s}dx = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{s}dx =$$
$$= \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2},\ (n = 1, 2, \dots).$$

Din ultima expresie rezultă

$$b_{2n} = 0,\ (n \in \mathbb{N});\ b_{2n-1} = \frac{8(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2},\ (n \in \mathbb{N}).$$

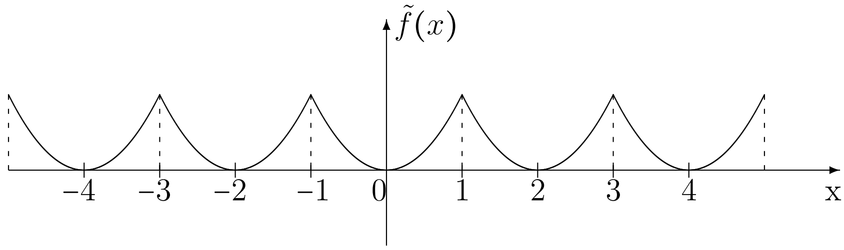
Drept consecinţă, putem scrie

$$\tilde{f}(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

7. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcţia periodică de perioadă $T = 2l = 2,\ f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$.

   Rezolvare.

   Se prelungeşte mai întâi funcţia $f(x)$ prin paritate pe intervalul $[-1,0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa, obţinându-se funcţia $\tilde{f}(x)$, continuă pe $\mathbb{R}$, al cărei grafic îl prezentăm în continuare:



   Funcţia dată fiind pară, avem $b_n = 0,\ (n \in \mathbb{N})$.

   Avem încă

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos\frac{n\pi x}{s} dx = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\ \ (n \in \mathbb{N}).$$

   Urmează atunci, în virtutea continuităţii funcţiei $\tilde{f}(x)$ că avem

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2},\ \ x \in \mathbb{R}$$

   Mai rezultă că putem scrie încă egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2} = \frac{\pi^2(3x^2-1)}{12},\ \ x \in [-1,1] \tag{2.47}$$

   Luând în (2.47) pe $x = 1$, obţinem suma seriei Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

   De asemenea, pentru $x = 0$, din (2.47) obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

   Din exemplele considerate se poate constata că din dezvoltări Fourier corespunzătoare, se pot obţine sumele unor serii numerice, pentru care, de cele mai multe ori nu putem preciza decât cel mult natura.

8. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică pe intervalul $[-l, l]$, $l > 0$ funcţia
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-l, 0) \\ x, & x \in [0, l] \end{cases}.$$

9. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică numai de sinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$

10. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică numai de cosinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia
$$f(x) = \pi - 2x.$$

11. Să se calculeze:
a) $(1+i)(2-3i)$; b) $(2+i)^3$; c) $\dfrac{2-i}{2+i}$; d) $\dfrac{1+3i}{2-i}$; e) $\dfrac{1+i}{i(2+3i)}$;
f) $\dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$.

12. Să se reprezinte în plan şi să se scrie sub formele trigonometrică şi exponenţială următoarele numere complexe: $\pm i$, $\pm 1 \pm i$, $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3} \pm i$, $\pm 4 \pm 3i$.

13. Să se scrie forma algebrică ale numerelor complexe având următoarele module şi argumente:
a) $|z| = 2, \arg z = \pi$; b) $|z| = 1, \arg z = \frac{3\pi}{4}$; c) $|z| = \pi, \arg z = \frac{\pi}{6}$;
d) $|z| = \frac{1}{2}, \arg z = -\frac{\pi}{3}$.

14. Să se determine şi să se reprezinte în plan numerele complexe care satisfac următoarele relaţii:
a) $|z| = 2$; b) $|z - 2i| \le 3$; c) $3 \le |z - 3 + 4i| \le 5$; d) $\operatorname{Re} z \le 3$; f) $\operatorname{Im} z \ge -2$;
g) $\dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}$

15. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$

b) $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$

c) $z^3 = -1$

d) $z^4 = 4$

e) $z^6 + (1+7i)z^3 + 8 + 8i = 0$

R:

a) $z_1 = -2 + i,\ z_2 = -3 + i$

b) $z_1 = -1,\ z_2 = 2i$

16. Să se calculeze următoarele valori:

a) e^{2+3i}

b) $\ln(\sqrt{3} + i)$

c) $(1+i)^{3-2i}$

d) i^i

R:

a) $e^2(\cos 3 + i \sin 3)$

b) $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

c) $2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\pi}{2}+4k\pi}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \ln 2\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \ln 2\right)\right], k \in \mathbb{Z}$

d) $e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\ k \in \mathbb{Z}$

17. Să se calculeze:

a) $\sin(2 - i)$

b) $\cos(2 + i)$

c) $\operatorname{tg}(2 - i)$

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$

e) $\operatorname{ch}(1 + i)$

f) $\operatorname{cth}(2 + i)$

Capitolul 3

Aplicaţiile trigonometriei în geometrie şi practică

3.1 Relaţii între laturi şi unghiuri într-un triunghi oarecare

Fie un triunghi oarecare cu vârfurile în punctele A, B, C (se notează $\triangle ABC$).

Unghiurile sunt notate cu A, B şi C şi măsura lor este cuprinsă între 0^0 şi 180^0 (în radiani între 0 şi π):

$$A + B + C = 180^0$$

Dacă toate unghiurile sunt ascuţite ($A, B, C < 90^0$) triunghiul se numeşte *ascuţitunghic*, dacă un unghi este obtuz (cu măsura între 90^0 şi 180^0) se numeşte *obtuzunghic*, iar dacă are un unghi drept (90^0) se numeşte *dreptunghic*.

Laturile se notează cu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ şi verifică inegalităţile:

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b \tag{3.1}$$

$$a > |b - c|, \quad b > |c - a|, \quad c > |a - b| \tag{3.2}$$

Un triunghi care are două laturi egale se numeşte *isoscel*, un triunghi cu toate laturile egale se numeşte *echilateral*, iar un triunghi cu laturile oarecare se mai numeşte şi triunghi *scalen*.

Notăm cu h_a, h_b, h_c înălţimile triunghiului duse din A, B, respectiv C. Avem:

$$h_a = c \sin B = b \sin C \Rightarrow \tfrac{b}{\sin B} = \tfrac{c}{\sin C}$$
$$h_b = c \sin A = a \sin C \Rightarrow \tfrac{a}{\sin A} = \tfrac{c}{\sin C}$$
$$h_c = a \sin B = b \sin A \Rightarrow \tfrac{b}{\sin B} = \tfrac{a}{\sin A}$$

Teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Aria $\triangle ABC$ este

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

Deducem că $\sin A = \frac{2S}{bc}, \sin B = \frac{2S}{ac}, \sin C = \frac{2S}{ab}$, iar teorema sinusurilor devine

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Avem $S = \frac{abc}{4R}$ şi

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$$

Teorema proiecţiilor:

$$\begin{aligned} a &= c\cos B + b\cos C \\ b &= a\cos C + c\cos A \\ c &= b\cos A + a\cos B \end{aligned}$$

Teorema lui Pitagora generalizată:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Teorema cosinusului:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

Avem:

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{A}{2} &= \frac{1}{2}(1+\cos A) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc} = \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc},\ \text{unde } p = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

Aşadar $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{1}{2}(1-\cos A) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{4bc} = \\ &= \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}, \text{ deci}\end{aligned}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Teorema tangentei:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R(\sin A-\sin B)}{2R(\sin A+\sin B)} = \frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}},\ \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}},\ \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}$$

Formulele lui Mollweide:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}};\ A+B+C=\pi \Rightarrow$$

$\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{\pi-C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ şi atunci obţinem

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\ \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\ \frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

şi analog

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},\ \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},\ \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

3.2 Formule pentru diverse elemente ale unui triunghi

1. **Aria** triunghiului

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (\textbf{formula lui Heron}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\frac{a\sin C}{\sin A}\cdot\sin A = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} \end{aligned}$$

2. **Raza cercului circumscris** triunghiului

$$2R = \frac{abc}{2S} \Rightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

3. **Raza cercului înscris** în triunghi

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}\cdot r = p\cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

4. **Înălţimile** triunghiului

$$\begin{aligned} h_a &= 2R\sin B\sin C \\ h_b &= 2R\sin A\sin C \\ h_c &= 2R\sin A\sin B \end{aligned}$$

5. **Bisectoarele** triunghiului

$$\begin{aligned} b_a &= \frac{b\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{c\sin B}{\cos\frac{B-C}{2}} \\ b_b &= \frac{c\sin A}{\cos\frac{C-A}{2}} = \frac{a\sin C}{\cos\frac{C-A}{2}} \\ b_c &= \frac{a\sin B}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{b\sin A}{\cos\frac{A-B}{2}} \end{aligned}$$

6. **Medianele** triunghiului

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \tfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \\ m_b^2 &= \tfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} \\ m_c^2 &= \tfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} \end{aligned}$$

3.3 Rezolvarea triunghiurilor

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A ($A = 90^0$). Lungimile catetelor sunt $AB = c$ şi $AC = b$, iar lungimea ipotenuzei este $BC = a$. Avem:

- Unghiurile ascuţite sunt complementare deoarece suma unghiurilor este 180^0:
$$B + C = 90^0$$
- Teorema lui Pitagora:
$$a^2 = b^2 + c^2$$
- Funcţiile trigonometrice în triunghiul dreptunghic:
$$\sin B = \frac{b}{a},\ \cos B = \frac{c}{a},\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c},\ \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}$$
$$\sin C = \frac{c}{a},\ \cos C = \frac{b}{a},\ \operatorname{tg} C = \frac{c}{b},\ \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}$$
- Aria triunghiului:
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot b\cdot c = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{4}a^2\sin 2B = \frac{1}{4}a^2\sin 2C \\ &= \frac{1}{2}b^2\operatorname{ctg} B = \frac{1}{2}c^2\operatorname{ctg} C \end{aligned}$$

Un triunghi dreptunghic poate fi rezolvat dacă sunt cunoscute (în afară de unghiul drept $A = 90^0$) următoarele elemente:

1. cele două catete b şi c
2. ipotenuza a şi o catetă b (sau c)
3. ipotenuza a şi un unghi ascuţit B (sau C)
4. o catetă şi unghiul opus ei (b şi B, sau c şi C)

Caz	Date	Necunoscute	Unghiuri	Laturi	Arie
1	b, c	B, C, a, S	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$	$a^2 = b^2 + c^2$	$S = \frac{1}{2}bc$
2	a, b	B, C, c, S	$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}$	$c^2 = a^2 - b^2$	$S = \frac{1}{2}b\sqrt{a^2 - b^2}$
3	a, B	C, b, c, S	$C = 90^0 - B$	$b = a\sin B$ $c = a\cos B$	$S = \frac{1}{4}a^2\sin 2B$
4	b, B	C, a, c, S	$C = 90^0 - B$	$a = \frac{b}{\sin B}$ $c = b\operatorname{ctg} B$	$S = \frac{1}{2}b^2\operatorname{ctg} B$

Un triunghi oarecare poate fi rezolvat dacă sunt cunoscute următoarele elemente:

1. două laturi şi unghiul dintre ele (cazul L.U.L.)
2. o latură şi două unghiuri (cazul U.L.U.)
3. toate cele trei laturi (cazul L.L.L.)
4. două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele (cazul L.L.U.)

Caz	Date	Nec.	Unghiuri	Laturi
L.U.L.	a, C, b	A, B, c	$\begin{cases} A + B = 180^0 - C \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \end{cases}$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
U.L.U.	B, a, C	A, b, c	$A = 180^0 - (B + C)$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \ c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
L.L.L.	a, b, c	A, B, C	$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$	Verificare : $A + B + C = 180^0$
L.L.U.	a, b, A	B, C, c	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ $C = 180^0 - (A + B)$	$c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0$ (ecuaţie de gr. 2 în c)

Observaţii:

- În cazul L.U.L. triunghiul poate fi construit grafic, deci existenţa lui este asigurată cu soluţie unică. Latura necunoscută se determină cu teorema lui Pitagora generalizată, iar unghiurile necunoscute se obţin din sistemul pentru suma şi diferenţa lor (ca în tabel) sau cu teorema sinusurilor

- În cazul U.L.U. triunghiul există şi este unic dacă şi numai dacă suma unghiurilor date este mai mică de 180^0. Unul din unghiurile date poate să nu fie alăturat laturii date deoarece din suma unghiurilor rezultă şi celălalt unghiu alăturat. Laturile necunoscute se calculează cu ajutorul teoremei sinusurilor.

- În cazul L.L.L. triunghiul există şi este unic determinat dacă şi numai dacă pentru laturile date sunt îndeplinite inegalităţile triunghiului. Unghiurile se determină cu ajutorul teoremei cosinusului sau cu formulele jumătăţii de arc în funcţie de laturi.

- În cazul L.L.U. triunghiul există dacă şi numai dacă ecuaţia de gradul doi obţinută din teorema lui Pitagora generalizată are cel puţin o rădăcină strict pozitivă.

$$c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow c = b\cos A \pm \sqrt{b^2\cos^2 A - b^2 + a^2} \Rightarrow$$
$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$$

3.4 Trigonometrie şi geometrie în spaţiu

Intersecţia a două plane neparalele este o dreaptă. Aceste plane se împart în patru semiplane (două câte două opuse) care au în comun dreapta de intersecţie.

Două semiplane formează un **unghi diedru**, dreapta ce limitează aceste semiplane se numeşte *originea diedrului* sau *muchia diedrului*, iar semiplanele se numesc *feţele diedrului*.

Prin *unghi plan corespunzător unui unghi diedru* înţelegem unghiul format de două semidrepte conţinute în cele două semiplane şi perpendiculare pe muchia diedrului.

Planul bisector al unghiului diedru este planul care conţine muchia diedrului şi care face cu feţele diedrului unghiuri plane corespunzătoare egale.

Fie un unghi diedru de măsură α. Dacă ABC este un triunghi de arie S situat pe una din feţele diedrului, atunci aria proiecţiei $A'B'C'$ pe cealaltă faţă a diedrului este $S' = S\cos\alpha$

Dacă se consideră un al treilea plan care nu este paralel cu cele două plane care formează unghiul diedru, atunci toate trei au un punct comun şi se intersectează două câte două după câte o dreaptă, formând trei muchii care trec prin punctul comun planelor. Spaţiul este împărţit de cele trei plane în opt părţi numite *octanţi*.

Porţiunea din spaţiu determinată de un octant se mai numeşte şi *unghi spaţial* sau **unghi triedru**. Elementele unui triedru $Oxyz$ sunt:

- *vârful* triedrului O
- 3 *muchii* (semidreptele Ox, Oy, Oz)
- 3 *feţe* plane (xOy, yOz, xOz), fiecare dintre ele fiind un unghi plan
- 3 *unghiuri diedre* având ca muchii Ox, Oy, Oz.

Bisectoarea unui triedru este semidreapta de intersecţie a planelor bisectoare ale celor trei diedre formate de feţele triedrului.

Teorema 3.1. *În orice triedru unghiul unei feţe este mai mic decât suma celorlalte două unghiuri.*

Un triedru pentru care cele trei semidrepte sunt perpendiculare două câte două se numeşte *triedru tridreptunghic*.

Un triedru tridreptunghic constituie suportul unui *reper* (*sistem de coordonate*) *cartezian* în spaţiu, muchiile fiind suportul *axelor de coordonate* (având fixate sensurile pozitive şi unitatea de măsură).

Un *reper drept* este un reper în care prin rotirea semiaxei pozitive Ox spre semiaxa pozitivă Oy în sens pozitiv, se obţine sensul pozitiv al semiaxei pozitive Oz după regula mâinii drepte sau a burghiului.

Dacă se consideră mai multe (cel puţin trei) plane ce au un punct comun se obţine un unghi mărginit de mai multe feţe plane, numit *unghi poliedru.*

Dacă interiorul unui unghi poliedru nu este intersectat de niciunul din planele care îl formează, acesta se numeşte *unghi poliedru convex*; în caz contrar unghiul se numeşte *unghi poliedru concav.*

Un plan care intersectează toate feţele unui unghi poliedru convex determină prin punctele de intersecţie cu muchiile poliedrului un poligon convex. Dacă acest poligon convex este inscriptibil într-un cerc, atunci acest cerc împreună cu vârful unghiului poliedru determină o suprafaţă conică în care este înscris poliedrul convex.

Un **unghi solid** este o porţiune din spaţiu mărginită de suprafaţa unui con circular drept.

Unghiurile solide se măsoară în *steradiani.* Un steradian este egal cu unghiul solid care, având vârful în centrul unei sfere, decupează pe aceasta o arie egală cu pătratul razei. Sfera are în total 4π steradiani (aria sferei fiind $4\pi r^2$).

Unghiurile solide se mai măsoară în *grade pătrate*, notate $(^0)^2$ sau deg^2. Ele măsoară porţiuni din suprafaţa unei sfere analog cum gradele măsoară porţiuni din lungimea unui cerc.
Astfel, dacă un grad are $\frac{\pi}{180}$ radiani, atunci un grad pătrat are $\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \simeq 3.0462 \cdot 10^{-4}$ steradiani.
O sferă întreagă are $4\pi\left(\frac{180}{\pi}\right)^2 = \frac{129600}{\pi} \simeq 41253\ deg^2$

3.5 Aplicaţii practice ale trigonometriei în topografie şi geodezie

3.5.1 Determinarea înălţimii unui obiect vertical

1. *Dacă punctul de la baza obiectului ce trebuie măsurat este accesibil*
   Notăm cu h înălţimea obiectului, d distanţa de la observator la baza obiectului şi α unghiul de elevaţie (determinat cu teodolitul). Atunci
   $$h = d \operatorname{tg} \alpha.$$

2. *Dacă punctul de la baza obiectului este inaccesibil* (metoda 1)
   Se determină cu ajutorul teodolitului unghiurile de elevaţie α şi β ale obiectului din două puncte distincte coliniare cu baza obiectului, aflate la distanţa d unul de celălalt. Atunci:
   $$h = \frac{d}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta} = \frac{d \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$
   Dacă obiectul este situat pe un plan înclinat (de pantă $\operatorname{tg}\varphi$) atunci:
   $$h = \frac{d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\varphi \sin(\beta - \alpha)}.$$

3. *Dacă punctul de la baza obiectului este inaccesibil* (metoda 2)

   - Fie P_1 şi P_2 două puncte în planul orizontal necoliniare cu baza obiectului B.
   - Notăm cu γ_1 şi γ_2 unghiurile făcute de BP_1 şi BP_2 cu P_1P_2, şi cu α_1, α_2 unghiurile de elevaţie măsurate în P_1, respectiv P_2.
   - Dacă d este distanţa dintre P_1 şi P_2, atunci:
     $$h = \frac{d \operatorname{tg}\alpha_1 \sin\gamma_2}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)} = \frac{d \operatorname{tg}\alpha_2 \sin\gamma_1}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}$$
   - Dacă se cunoaşte doar unul dintre unghiurile γ_1 şi γ_2, avem $BP_1 = h \operatorname{ctg}\alpha_1$ şi $BP_2 = h \operatorname{ctg}\alpha_2$, iar aplicând teorema cosinusului în $\triangle BP_1P_2$ pentru unghiul cunoscut se obţine h.

3.5.2 Determinarea distanţei dintre două puncte

1. Determinarea distanţei dintre două puncte accesibile despărţite printr-un obstacol
   - Fie A şi B cele două puncte despărţite printr-un obstacol.
   - Se alege un punct C din care se văd punctele A şi B şi se măsoară distanţele $AC = b$ şi $BC = a$.
   - Se determină unghiul $C = \measuredangle ACB$.
   - Distanţa $c = AB$ se determină din triunghiul ABC cu teorema lui Pitagora generalizată:
   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
2. Determinarea distanţei dintre un punct accesibil şi unul inaccesibil
   - Fie punctul accesibil A şi un punct B inaccesibil observatorului.
   - Se alege un punct C din care se văd punctele anterioare A şi B, punctul B fiind despărţit de punctele A şi C printr-un obstacol.
   - Se măsoară distanţa $CA = d$ şi unghiurile $\measuredangle CAB = \alpha$ şi $\measuredangle ACB = \gamma$
   - Pentru determinarea distanţei $AB = x$ se aplică teorema sinusurilor în triunghiul ABC. Obţinem
   $$x = \frac{d\sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$
3. Determinarea distanţei dintre două puncte vizibile dar inaccesibile
   - Fie A şi B cele două puncte inaccesibile observatorului.
   - Se aleg alte două puncte C şi D din care se văd punctele A şi B dar sunt despărţite printr-un obstacol de acestea.
   - Se măsoară distanţa $CD = d$, precum şi unghiurile $\measuredangle ACB = \alpha_1$, $\measuredangle BCD = \alpha_2$, $\measuredangle ADB = \beta_1$ şi $\measuredangle ADC = \beta_1$.
   - Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul BCD rezultă
   $$BC = \frac{d\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)}$$
   - Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ACD rezultă
   $$AC = \frac{d\sin\beta_2}{\sin(\beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2)}$$
   - Distanţa căutată se obţine din triunghiul ABC:
   $$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\alpha_1$$

3.6 Exerciţii

1. Să se rezolve triunghiurile dreptunghice în care se cunosc:

   a) $A = 90^0,\ b = 3m, c = 4m$;

   b) $A = 90^0,\ a = 15m, c = 5m$;

   c) $A = 90^0,\ a = 100m, B = 69^0 21' 14''$;

   d) $A = 90^0,\ c = 10m, C = 22^0 30'$.

   R:

   a) $B = 36^0 52' 12'',\ C = 53^0 07' 48'',\ a = 5m,\ S = 6m^2$

   b) $B = 70^0 32' 44'',\ C = 19^0 27' 16'',\ b = 14.142136m,\ S = 35.355339m^2$

   c) $C = 20^0 38' 46'',\ b = 93.577607m,\ c = 35.259487m,\ S = 1649.749199m^2$

   d) $B = 67^0 30',\ a = 26.131259m,\ b = 24.142136m,\ S = 120,710678m^2$

2. Să se rezolve triunghiurile în care se cunosc:

   a) $a = 2.25, b = 8, C = 36^0 44'$
   R: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 69.0625 - 36\cos 36.733333^0 = 40.211098 \Rightarrow$ $c = 6.341222$.
   Din teorema tangentelor $\Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = -1.689636 \Rightarrow$ $A - B = -118.762219^0$.
   Avem de asemenea $A + B = 180^0 - C = 143^0 16' = 143.266666^0$.
   Rezolvând sistemul găsim $A = 12.252224^0 = 12^0 15' 08''$ şi $B = 131.014442^0 = 131^0 52''$.
   Aria este $S = \frac{1}{2}ab\sin C = 5.382823$.

   b) $a = 4,\ A = 14^0 15',\ B = 112^0 37' 12''$;
   R: $C = 180^0 - (A + B) = 180^0 - 126^0 52' 12'' = 53^0 07' 48'' = 53.13^0$
   Laturile b şi c se obţin din teorema sinusurilor:
   $$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{4\sin 112.62}{\sin 14.25^0} = 15;\ c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{4\sin 53.13}{\sin 14.25^0} = 13$$
   Aria este $S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} = 24$.

   c) $a = 19,\ b = 34,\ c = 49$;
   R: Condiţiile de existenţă a triunghiului sunt îndeplinite.

Avem semiperimetrul $p = 51$, $p-a = 32$, $p-b = 17$, $p-c = 2$, de unde găsim:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = 0.144338 \Rightarrow A = 16.426421^0 = 16^0 25' 35''$$
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = 0.271694 \Rightarrow B = 30.400027^0 = 30^0 24'$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = 2.309401 \Rightarrow C = 133.173551^0 = 133^0 10' 25''$$

Aria este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 235.558910$

d) $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $B = 45^0$;

R: Din teorema lui Pitagora generalizată $\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow c^2 - 2ac\cos B + a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow c^2 - 2c + 2 = 0$ ecuaţie care are singura rădăcină pozitivă $c = 1 + \sqrt{3} = 2.732051$.

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^0 \Rightarrow C = 180^0 - (A + B) = 105^0$.

Aria este $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} = 1.366025$

e) $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{17}$, $B = \arccos\frac{4\sqrt{17}}{17}$;

R: Din teorema lui Pitagora generalizată $\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow a^2 - 2ac\cos B + c^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 = 0$ ecuaţie care are două rădăcini pozitive, deci problema are două soluţii:

Pentru $a_1 = 2 \Rightarrow \cos C_1 = \dfrac{a_1^2 + b^2 - c^2}{2a_1 b} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow C_1 = 153.434949^0 = 153^0 26' 06'' \Rightarrow$

$A_1 = 180^0 - (B + C_1) = 12.528808^0 = 12^0 31' 44''$. Aria este $S_1 = \frac{1}{2} bc \sin A_1 = 1.002842$.

Pentru $a_2 = 6 \Rightarrow \cos C_2 = \dfrac{a_2^2 + b^2 - c^2}{2a_2 b} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow C_2 = 26.565051^0 = 26^0 53' 54'' \Rightarrow$

$A_2 = 180^0 - (B + C_2) = 139.398706^0 = 139^0 23' 56''$. Aria este $S_1 = \frac{1}{2} bc \sin A_2 = 2.999989$.

3. Să se rezolve triunghiurile în care se cunosc:

a) $a = 14$, $c = 13$, $B = 67^0 22' 49''$;

b) $b = 15$, $A = 14^0 15'$, $C = 53^0 07' 48''$;

c) $a = 5,\ b = 12,\ c = 13$;

d) $b = 5.064,\ c = 7.458,\ C = 10^0 32' 48''$;

e) $a = 1000,\ A = 50^0,\ B = 75^0$;

f) $a = 112,\ b = 86,\ c = 98$;

g) $a = 13.9,\ c = 8.43,\ A = 126^0 43'$;

h) $a = 2.018,\ b = 1.466,\ C = 58^0 47'$;

i) $a = 1,\ b = 2,\ c = \sqrt{3}$.

R:

a) $b = 15,\ C = 53^0 07' 48'',\ A = 59^0 29' 23''\ S = 84$;

b) $a = 4,\ c = 13,\ B = 112^0 37' 12'',\ S = 24$;

c) $A = 22^0 37' 12'',\ B = 67^0 22' 48'',\ C = 90^0,\ S = 30$;

d) $A = 162^0 18' 48'',\ B = 7^0 08' 24'',\ a = 12.379,\ S = 5.737$;

e) $b = 1260.6,\ c = 1069.3,\ C = 55^0,\ S = 516311$;

f) $A = 74^0 40' 17'',\ B = 47^0 46' 39'',\ C = 57^0 33' 04'',\ S = 4064.1$;

g) $B = 24^0 11',\ C = 29^0 06',\ b = 7.102,\ S = 24$;

h) $A = 76^0 19' 07'',\ B = 44^0 53' 53'',\ c = 1.776,\ S = 1.265$;

i) $B = 90^0,\ C = 60^0,\ A = 30^0,\ S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. La distanţa de 7.62 metri un turn se vede sub unghiul de 78^0. Care este înălţimea turnului?
   R: 35.85 m

5. Un pod orizontal peste un râu are lungimea de 400 m. Dintr-un capăt A al podului se observă un punct situat pe suprafaţa apei exact sub pod un obiect P sub un unghi de declinaţie de 5^0. Din capătul celălalt B al podului, obiectul P se vede sub unghiul de declinaţie de 7^0. Să se determine la ce înălţime faţă de suprafaţa apei este situat podul.
   R: 20.435 m

6. Un om observă un arbore sub unghiul de elevaţie de 46^0. După ce merge 2m în direcţia arborelui, găseşte unghiul de elevaţie de 50^0. Care este înălţimea arborelui?
   R: 15.8 m

7. Un avion este văzut simultan de doi observatori situaţi în acelaşi plan cu verticala avionului la distanţa de 320 m unul de celălalt, sub unghiurile de elevaţie de 52^0, respectiv 57^0. Să se calculeze altitudinea la care zboară avionul.
   R: 2426.5 m

8. Dintr-un punct situat în planul orizontal al solului se vede o clădire înaltă sub un unghi de elevaţie de $11^0 29'$. Din alt punct situat cu 30 m mai aproape de baza clădirii unghiul este de $13^0 18'$. Să se determine înălţimea clădirii.
   R: 43.34 m

9. Dintr-un punct situat la poalele unui deal, acesta se observă sub un unghi de 20^0. Din alt punct situat în plan orizontal mai aproape de deal cu 100 m, acesta se vede sub un unghi de 25^0. Să se afle înălţimea relativă a dealului.
   R: 165.85 m

10. Un stâlp cu înălţimea de 3 m lasă în lumina soarelui o umbră cu lungimea de 5 m. Care va fi lungimea umbrei când soarele va fi cu 10^0 mai sus pe bolta cerească?
    R: 3.456 m

11. Un releu TV este situat în vârful unui deal de pantă 15^0 şi se vede dintr-un punct situat mai în vale sub un unghi de $11^0 24'$. Urcând pe pantă în direcţia releului 50 m, unghiul sub care se vede releul este $17^0 36'$. Să se calculeze înălţimea releului.
    R: 28.645 m

12. Un balon este observat la două staţii P şi Q, situate la acelaşi nivel orizontal, P fiind la 1000 metri la nord de Q. La un moment dat balonul apare din P în direcţia $33^0 12'$ NE, sub unghiul de elevaţie $53^0 25' 12''$, iar din Q apare în direcţia $21^0 27'$ NE. Să se determine înălţimea la care este situat balonul.
    R: 2419.74 m

13. Dintr-un punct P_1 situat la sol la sud de un balon, acesta se vede sub unghiul de elevaţie de $41^0 12'$. În acelaşi timp, din alt punct P_2 situat la 1000 m est de P_1, unghiul de elevaţie este de $36^0 41'$. La ce înălţime este balonul?
    R: 1418 m

14. Din două puncte de observaţie P şi Q situate în acelaşi plan la distanţă de 100 m unul de altul se vede un obiect vertical AB (B coplanar cu P şi Q, AB perpendicular pe acest plan) sub unghiurile $\alpha = 35^0$, respectiv $\beta = 50^0$. Tot din P se măsoară unghiul $\gamma = 40^0$ sub care se vede segmentul QB. Să se calculeze înălţimea obiectului AB.
R: 50.8862 m

15. Fie A şi B două puncte situate pe marginile opuse ale unui teren mlăştinos. Dintr-un punct C situat în afara mlaştinii se constată că distanţa PA este de 882 metri, distanţa PB este de 1008 metri, iar unghiul sub care se vede din C segmentul AB este de $55^0 40'$. Care este distanţa dintre punctele A şi B?
R: 889.5 m

16. Se observă din două puncte A şi B de pe malul unui râu, situate la distanţa de 150 metri, un reper P de pe malul opus. Sunt măsurate unghiurile $\measuredangle PAB = 51^0 20'$ şi $\measuredangle PBA = 62^0 12'$. Să se calculeze lăţimea râului.
R: 113 m

17. De pe malul unui râu care nu poate fi traversat se doreşte să se afle distanţa dintre doi copaci A şi B situaţi pe malul opus. În acest scop se măsoară distanţa de 25 m dintre două puncte P şi Q situate pe malul accesibil şi unghiurile $\measuredangle APB = \measuredangle BPQ = 60^0$, $\measuredangle AQB = 30^0$, $\measuredangle AQP = 45^0$.
R: 59.15 m

18. Fie A şi B sunt două nave pe mare, iar P şi Q sunt două puncte de observaţie situate pe mal la distanţa de 1100 metri între ele. Se consideră că cele patru puncte A, B, P şi Q sunt situate aproximativ în acelaşi plan orizontal. Din P, distanţa AB se vede sub un unghi de 49^0, iar BQ sub un unghi de 31^0. Din Q, distanţa AB se vede sub un unghi de 60^0, iar AP sub un unghi de 62^0. Să se calculeze distanţa AB dintre nave.
R: 1567.66 m