Algebră Liniară

asist. Ciprian Deliu
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului

2014

Cuprins

Capitolul 1

Matrice. Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare

1.1 Matrice. Determinanţi

Definiţia 1.1. *Se numeşte **matrice** reală cu m linii şi n coloane o funcţie care asociază fiecărei perechi (i, j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ un unic număr real a_{ij}. Se foloseşte notaţia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Mulţimea tuturor matricelor reale cu m linii şi n coloane o vom nota prin $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Numerele a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ se numesc *elementele matricei.*

După cum sunt numerele m şi n, putem defini următoarele tipuri de matrice:

- dacă $m = n$, matricea se numeşte *matrice pătratică*
- dacă $m = 1$, matricea se numeşte *matrice linie*
- dacă $n = 1$, matricea se numeşte *matrice coloană*

Se numeşte *matrice nulă* o matrice care are toate elementele 0.

Matricea pătratică

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

se numeşte *matrice unitate* de ordinul n.

Definiţia 1.2. *Prin **suma** a două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ înţelegem o nouă matrice $C = A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ale cărei elemente sunt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

Definiţia 1.3. *Prin **produsul matricei** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ **cu scalarul** $\alpha \in \mathbb{R}$ se înţelege o nouă matrice, de aceleaşi dimensiuni, obţinută prin înmulţirea tuturor elementelor lui A cu scalarul α:*

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1. *Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci avem:*

a. $A + B = B + A$;

b. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

c. $A + 0 = A$;

d. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

e. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

f. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Definiţia 1.4. *Prin **produsul matricelor** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ se înţelege o nouă matrice $C = AB$, ale cărei elemente sunt date prin:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \ \forall i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, p.$$

Teorema 1.2. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, B, C matrice ale căror dimensiuni să permită efectuarea operaţiilor indicate, şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci avem:*

a. $A(BC) = (AB)C$;

b. $A(B + C) = AB + AC$;

c. $(B + C)A = BA + CA$;

d. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

e. $I_m A = A I_n$.

Definiţia 1.5. *Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, se numeşte **transpusa** lui A, matricea obţinută prin interschimbarea liniilor şi coloanelor lui A:*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

Teorema 1.3. *Fie A, B două matrice ale căror dimensiuni să permită efectuarea operaţiilor indicate, şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci avem:*

1. $(A^T)^T = A$;

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;

3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

O matrice pătratică A care are proprietatea că $A = A^T$ se numeşte *matrice simetrică.*

Definiţia 1.6. *Fie o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se numeşte **determinant** al matricei A, şi se notează cu $\det A$, un număr real definit recurent în felul următor:*

(i) dacă $n = 2$, atunci

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

(ii) dacă $n > 2$, atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} D_{1i} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n}$$

unde D_{1i} este determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ obţinută prin eliminarea primei linii si a coloanei i din matricea A, pentru $i = 1, 2, \dots, n$.

Pentru $n = 3$ se obţine *regula lui Sarrus*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ se numeşte *complement algebric* corespunzător liniei i şi coloanei j, pentru $i, j = 1, \ldots, n$. Folosind complemenţii algebrici corespunzători unei linii sau unei coloane, putem calcula determinantul unei matrice printr-o formulă asemănătoare celei din definiţie, dezvoltând după o linie sau coloană oarecare a matricei.

Teorema 1.4. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci pentru $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixaţi avem:*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}. \end{aligned}$$

Teorema 1.5. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci:*

1. $\det A^T = \det A$*;*

2. $\det AB = \det A \det B$.

Teorema 1.6. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci avem:*

(i) dacă matricea B este obţinută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulţită cu o constantă, atunci

$$\det B = \det A;$$

(ii) dacă matricea B este obţinută prin interschimbarea a două linii ale lui A, atunci

$$\det B = -\det A;$$

(iii) dacă matricea B este obţinută prin înmulţirea unei linii a lui A cu o constantă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci

$$\det B = \alpha \det A.$$

Observaţie 1. *Aceleaşi proprietăţi rămân valabile dacă operaţiile de mai sus se efectuează asupra coloanelor matricii A.*

Definiţia 1.7. *O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte* ***nesingulară*** *dacă are determinantul nenul, şi se numeşte* ***singulară*** *dacă* $\det A = 0$.

Definiţia 1.8. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară. Se numeşte* ***matrice inversă*** *a lui A o matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că*

$$AA^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

Teorema 1.7. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară. Atunci inversa acesteia este dată prin:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricea de mai sus se notează cu

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

şi se numeşte *matrice adjunctă* a lui A.

Definiţia 1.9. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $p \le \min(m,n)$.*

I. Se numeşte ***minor*** *de ordinul p al matricii A, orice determinant al unei matrice obţinute prin intersectarea a p linii şi p coloane din A;*

II. Se numeşte ***rangul*** *matricei A, ordinul maxim al minorilor nenuli ai lui A.*

Operaţiile care păstrează rangul unei matrice se numesc *transformări elementare* şi sunt următoarele:

- înmulţirea unei linii cu o constantă nenulă
- interschimbarea a două linii
- adunarea unei linii înmulţită cu o constantă la o altă linie

precum şi operaţiile analoage pe coloane.

1.2 Sisteme de ecuaţii liniare

Se numeşte *sistem de ecuaţii liniare* un sistem de forma

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

Matricele formate cu ajutorul coeficienţilor sistemului

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se numesc *matricea sistemului*, respectiv *matricea extinsă a sistemului.*

- Dacă toţi termenii liberi sunt nuli ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), sistemul se numeşte *omogen.*
- Rangul matricei A se numeşte *rangul sistemului.*
- Dacă există $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ care verifică (1.1), spunem că sistemul este *compatibil*, iar valorile care satisfac ecuaţiile sistemului se numesc *soluţii.*
- A rezolva un sistem de ecuaţii înseamnă a găsi soluţii $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- În cazul în care numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor ($m = n$), pentru rezolvarea sistemului se poate folosi regula lui Cramer

Teorema 1.8 (Regula lui Cramer)**.** *Fie sistemul cu n ecuaţii şi n necunoscute*

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dacă $\det A \neq 0$*, atunci sistemul este compatibil şi are soluţia unică*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

unde $D = \det A$*, iar* D_i *este determinantul matricei obţinută prin înlocuirea în matricea* A *a coloanei* i *cu coloana termenilor liberi, pentru* $i = 1, 2, \dots, n$*.*

Sistemul (1.1) poate fi rescris în forma matriceală

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sau pe scurt $Ax = b$, unde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ şi } b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$

Dacă A este matrice pătratică nesingulară, atunci soluţia sistemului este dată de

$$x = A^{-1}b.$$

Teorema 1.9 (Kronecker-Capelli)**.** *Sistemul* (1.1) *este compatibil dacă şi numai dacă matricele A şi $\bar{A}$ au acelaşi rang.*

Observaţii:

- Întrucât matricea extinsă $\bar{A}$ este obţinută prin adăugarea unei coloane la matricea A, în general avem că rang($\bar{A}$) ≥rang(A). Aşadar un sistem este incompatibil dacă prin adăugarea coloanei termenilor liberi se măreşte rangul matricei.

- Fie un sistem compatibil, r =rang($\bar{A}$) =rang(A) şi un minor nenul de ordin r al matricei A. Necunoscutele corespunzătoare coloanelor acestui minor le vom numi *necunoscute principale*, iar celelalte se vor numi *necunoscute secundare*. De asemenea, ecuaţiile corespunzătoare liniilor acestui minor le vom numi *ecuaţii principale*.

- Soluţiile sistemului se obţin parametrizând necunoscutele secundare şi rezolvând sistemul format din ecuaţiile principale şi necunoscutele principale.

1.3 Exerciţii

1. Să se efectueze diverse operaţii cu matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. a) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. Calculaţi k astfel încât $AB = BA$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se verifice că $AB = AC$, deşi $B \neq C$.

3. Să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

R: a) 216; b) -106; c) -11

4. Să se calculeze rangul matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

R: a) 3; b) 2; c) 5

5. Să se calculeze inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

R: a) $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 11 & -1 \\ 2 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -14 & -2 & 20 \\ -12 & 4 & 8 \\ 10 & -2 & -12 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

6. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \end{cases}$

R: a) $(1,2,-2)$; b) $(2,1,1,1)$; c) $(-8, 3+\alpha, 6+2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
d) Matricea sistemului şi matricea extinsă sunt

$$A = \begin{pmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= (3-2\lambda)(2-\lambda)^2 + (2-\lambda) + (2-\lambda) - (2-\lambda) - (3-2\lambda) - (2-\lambda)^3 \\ &= (2-\lambda)^2(3-2\lambda-2+\lambda) + \lambda - 1 = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda). \end{aligned}$$

Distingem următoarele cazuri:

I. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \Rightarrow \det A \neq 0$
II. $\lambda = 1 \Rightarrow \det A = 0$
III. $\lambda = 3 \Rightarrow \det A = 0$

Cazul I: Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \Rightarrow \det A \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat, soluţia unică fiind găsită cu regula lui Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \frac{(1-\lambda)^2(\lambda-3)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = -1 \\ x_2 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 3-2\lambda & \lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \frac{(1-\lambda)^2(4-\lambda)}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = \frac{4-\lambda}{3-\lambda} \\ x_3 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & \lambda \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \frac{(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2(3-\lambda)} = \frac{1}{3-\lambda} \end{aligned}$$

Cazul II: Dacă $\lambda = 1$, sistemul iniţial $\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \end{cases}$

devine $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Avem rang$A$ =rang$\bar{A}$ = 1, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat.
Alegem x_1 necunoscută principală şi $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ necunoscute secundare. Se obţine $x_1 = 1 - \alpha - \beta$, deci mulţimea soluţiilor este

$$\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>Cazul III</u>: Dacă $\lambda = 3$, sistemul iniţial devine
$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$, matricea extinsă $\bar{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
are rangul 3, iar rang$A = 2$, deci sistemul este incompatibil.

Capitolul 2

Spaţii vectoriale

2.1 Definiţii şi exemple

Definiţia 2.1. *O mulţime nevidă V se numeşte* ***spaţiu vectorial*** *real dacă pe V sunt definite două operaţii:*

- *o operaţie internă (adunarea):*

$$+ : V \times V \to V;\ (x, y) \to x + y$$

- *o operaţie externă (înmulţirea cu scalari):*

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V;\ (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

care satisfac următoarele axiome:

1. $(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall x, y, z \in V$
2. $\exists\ 0_V \in V$ *astfel încât* $x + 0_V = 0_V + x = x,\ \forall x \in V$
3. $\forall x \in V,\ \exists -x \in V:\ x + (-x) = (-x) + x = 0_V$
4. $x + y = y + x,\ \forall x, y \in V$
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in V$
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in V$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in V$
8. $1 \cdot x = x,\ \forall x \in V$

Proprietăţi:

- Elementele unui spaţiu vectorial se numesc *vectori*;
- Numerele reale cu care operăm asupra vectorilor le vom numi *scalari*;
- Vectorul 0_V se numeşte *vectorul nul*;
- Vectorul $-x$ se va numi *opusul* vectorului x.

Din axiomele definiţiei spaţiului vectorial, rezultă următoarele consecinţe:

1. $0 \cdot x = 0_V, \ \forall x \in V$
2. $\alpha \cdot 0_V = 0_V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(-1) \cdot x = -x, \ \forall x \in V$
4. $\alpha x = 0_V \Rightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0_V, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ x \in V$
5. $\alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ x \in V \setminus \{0_V\}$
6. $\alpha x = \alpha y \Rightarrow x = y, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ x, y \in V$

Exemple de spaţii vectoriale reale:

1. $\mathbb{R}^n$, împreună cu operaţiile:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

2. $\mathbb{R}_n[X]$, mulţimea polinoamelor de grad cel mult n, împreună cu adunarea polinoamelor şi înmulţirea polinoamelor cu scalari;
3. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ împreună cu adunarea matricelor şi înmulţirea matricelor cu scalari
4. $C^0_{[a,b]}$, mulţimea funcţiilor reale continue definite pe intervalul $[a, b]$, împreună cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea funcţiilor cu scalari

2.2 Subspaţii vectoriale

Definiţia 2.2. *Fie V un spaţiu vectorial. O submulţime nevidă $U \subset V$ se numeşte* ***subspaţiu vectorial*** *al lui V dacă*

1. $u + v \in U, \ \forall u, v \in U$;
2. $\alpha v \in U, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in U$.

Teorema 2.1. *Fie V un spaţiu vectorial. O submulţime nevidă $U \subset V$ este subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă*

$$\alpha u + \beta v \in U, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in U.$$

Mulţimea V şi mulţimea $\{0_V\}$ sunt subspaţii vectoriale.
Exemplu: Mulţimea

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$.
Demonstraţie: Fie $x, y \in U$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vom arăta că $\alpha x + \beta y \in U$.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in U \Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$y = (y_1, y_2, y_3) \in U \Rightarrow y_1 - y_2 + y_3 = 0$$

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

Verificăm dacă vectorul $\alpha x + \beta y$ îndeplineşte condiţia din definiţia lui U:

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta y_1 - \beta y_2 + \beta y_3$$

$$= \alpha(x_1 - x_2 + x_3) + \beta(y_1 - y_2 + y_3) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Teorema 2.2. *Fie U_1 şi U_2 două subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V. Atunci $U_1 \cap U_2$ este subspaţiu vectorial al lui V.*

Demonstraţie:
Deoarece $0_V \in U_1$ şi $0_V \in U_2$, rezultă că $0_V \in U_1 \cap U_2$, aşadar $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.
Fie $x, y \in U_1 \cap U_2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cum U_1 şi U_2 sunt subspaţii vectoriale, avem

$$x, y \in U_1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U_1$$

$$x, y \in U_2 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U_2$$

de unde rezultă că $\alpha x + \beta y \in U_1 \cap U_2$.

Observaţie 2. *Reuniunea $U_1 \cup U_2$ nu este subspaţiu vectorial al lui V.*

Definiţia 2.3. *Fie U_1 şi U_2 două subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V. Mulţimea*

$$U_1 + U_2 = \{v \in V | v = v_1 + v_2, \; v_1 \in U_1, v_2 \in U_2\}$$

se numeşte ***suma*** *subspaţiilor U_1 şi U_2.*

Teorema 2.3. *Suma $U_1 + U_2$ a subspaţiilor U_1 şi U_2 ale unui spaţiu vectorial V este de asemenea subspaţiu vectorial al lui V.*

Demonstraţie: Fie $u, v \in U_1 + U_2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

$$u = u_1 + u_2, \text{ cu } u_1 \in U_1 \text{ şi } u_2 \in U_2$$
$$v = v_1 + v_2, \text{ cu } v_1 \in U_1 \text{ şi } v_2 \in U_2$$

U_1 şi U_2 fiind subspaţii vectoriale ale lui V, rezultă că

$$\alpha u_1 + \beta v_1 \in U_1 \text{ şi } \alpha u_2 + \beta v_2 \in U_2.$$

Deci

$$\alpha u + \beta v = \alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) =$$
$$= (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2) \in U_1 + U_2$$

adică $U_1 + U_2$ este subspaţiu vectorial al lui V.

Definiţia 2.4. *Fie U_1 şi U_2 două subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V. Dacă $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$, atunci $U_1 + U_2$ se numeşte* ***sumă directă*** *a subspaţiilor U_1 şi U_2, şi se notează cu $U_1 \oplus U_2$.*
Dacă în plus $U_1 \oplus U_2 = V$, atunci spunem că U_1 şi U_2 sunt ***subspaţii complementare****.*

Definiţia 2.5. *Spunem că un vector $v \in V$ este o* ***combinaţie liniară*** *a vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Teorema 2.4. *Fie vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Atunci mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale acestor vectori*

$$Sp\{v_1, \ldots, v_n\} = \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | \alpha_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, \ldots, n \right\}$$

este un subspaţiu al lui V şi se numeşte ***subspaţiul generat*** *de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

Definiţia 2.6. *Spunem că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ formează un* ***sistem de generatori*** *pentru V dacă subspaţiul generat de aceşti vectori coincide cu V. Cu alte cuvinte,*

$$\forall v \in V,\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Exemple:

1. În $\mathbb{R}^3$, vectorii $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ formează un sistem de generatori.

2. În $\mathbb{R}_n[X]$, vectorii $1, X, X^2, \dots, X^n$ constituie un sistem de generatori

Exemplu: Sistemul de vectori

$$S = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$$

formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$.
Demonstraţie: Fie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Trebuie să arătăm că există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,0,1)$$

sau $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

obţinem $\alpha_1 = x_1,\ \alpha_2 = x_2 - x_1,\ \alpha_3 = x_3 - x_2$.

2.3 Dependenţă liniară. Bază. Dimensiune

Definiţia 2.7. *Spunem că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sunt* ***liniar independenţi*** *dacă are loc implicaţia:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = a_n = 0.$$

În caz contrar, dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nu toţi nuli astfel încât $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$, spunem că $v_1, v_2, \dots, v_n$ sunt ***liniar dependenţi****.*

Observaţie 3. *Dacă o mulţime de vectori sunt liniar independenţi, atunci orice submulţime din aceşti vectori sunt de asemenea linear independenţi. Orice mulţime formată dintr-un singur vector este linear independentă, iar orice mulţime care conţine vectorul nul este linear dependentă.*

Definiţia 2.8. *Spunem că sistemul de vectori* $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *este o **bază** a spaţiului vectorial* V *dacă vectorii* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *sunt liniar independenţi şi formează un sistem de generatori pentru* V.

Teorema 2.5. *Un sistem de vectori* $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *este bază a lui* V *dacă şi numai dacă orice vector* $x \in V$ *se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii din* B*:*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,\ \ x_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, \dots, n.$$

Scalarii $x_1, x_2, \dots, x_n$ se numesc *componentele* sau *coordonatele* vectorului x în baza B.

Teorema 2.6. *Dacă* $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *este o bază a spaţiului vectorial* V*, atunci orice submulţime a lui* V *care conţine mai mult de* n *vectori este liniar dependentă. De asemenea, orice altă bază a lui* V *are exact* n *vectori.*

Definiţia 2.9. *Se numeşte **dimensiune** a spaţiului vectorial* V *şi se notează* $\dim V$*, numărul vectorilor dintr-o bază oarecare a lui* V.

Exemple:

1. Baza *canonică* în $\mathbb{R}^n$ este $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, unde $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$, deci $\dim \mathbb{R}^n = n$;

2. Baza *canonică* în $\mathbb{R}_n[X]$ este $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$, deci $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$;

3. Baza *canonică* în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este

$$B = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

deci $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

Teorema 2.7. *Fie* $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *o bază a spaţiului vectorial real* V*, şi un sistem de vectori* $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$. *Considerăm* $S \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *matricea care are pe coloane componentele în baza* B *ale vectorilor* $v_1, v_2, \dots, v_p$. *Atunci:*

a) vectorii $v_1, v_2, \dots, v_p$ *sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă rangul matricei* S *este* p*;*

b) $\dim Sp\{v_1, \dots, v_n\} = rang(S)$.

Teorema 2.8 (**Grassman**). *Dacă* U_1, U_2 *sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial* V*, atunci*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

2.4 Schimbări de baze

Fie V un spaţiu vectorial n-dimensional şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $B' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ două baze în V. Fiecare vector din B' poate fi scris în mod unic în baza B astfel:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n_1}e_n \\ f_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n_2}e_n \\ &\vdots \\ f_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{n_n}e_n \end{aligned}$$

sau pe scurt

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, \ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Definiţia 2.10. *Se numeşte* ***matrice de trecere*** *de la baza B la baza B' matricea care are pe coloane componentele vectorilor din B' în baza B:*

$$S_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.9. *Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $B' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ două baze în spaţiul vectorial V, şi fie vectorul $v \in V$, scris în bazele B şi B' astfel:*

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = y_1f_1 + y_2f_2 + \cdots + y_nf_n.$$

Atunci avem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S_{BB'} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

unde $S_{BB'}$ este matricea de trecere de la B la B'.

Teorema 2.10. *Fie B, B' două baze ale spaţiului vectorial V. Atunci matricea de trecere de la B la B' este nesingulară şi avem $S_{B'B} = S_{BB'}^{-1}$*

2.5 Spaţii euclidiene

Definiţia 2.11. *Fie V un spaţiu vectorial. Se numeşte* ***produs scalar*** *pe V o funcţie*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

care asociază fiecărei perechi de vectori din V un număr real $\langle u, v\rangle$ şi care satisface condiţiile:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \ \forall u, v \in V$
2. $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle, \ \forall u_1, u_2, v \in V$
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in V$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0, \ \forall u \in V; \ \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V.$

Din cele patru proprietăţi de mai sus, se mai pot deduce următoarele:

1. $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle, \ \forall u, v_1, v_2 \in V$
2. $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in V$
3. $\langle 0_V, v\rangle = \langle v, 0_V\rangle = 0, \ \forall v \in V$

Demonstraţie:

1. $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$
2. $\langle u, \lambda v\rangle = \langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$
3. $\langle 0_V, v\rangle = \langle u - u, v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle = 0$

Definiţia 2.12. *Un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar $\langle \cdot, \cdot\rangle$ se numeşte* ***spaţiu euclidian****.*

Exemple:

1. Pe spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ definim produsul scalar standard

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

   unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

2. Pe spaţiul vectorial al matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definim produsul scalar

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B), \ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

3. Pe spaţiul vectorial $C^0_{[a,b]}$ definim produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx, \ \forall f, g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continue.}$$

Teorema 2.11 (Cauchy-Schwarz-Buniakovski). *Fie* $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian. Atunci are loc inegalitatea*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \sqrt{\langle u,u\rangle}\cdot\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

Demonstraţie: Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu

$$\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle$$

Pentru $u = 0_V$ sau $v = 0_V$, inegalitatea devine egalitate.
Dacă $u,v \in V \setminus \{0_V\}$, considerăm combinaţia liniară $u+\lambda v \in V$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un scalar arbitrar. Din proprietăţile produsului scalar avem că

$$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle \geq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Aplicând proprietăţile produsului scalar, membrul stâng al inegalităţii devine

$$\begin{aligned}\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle &= \langle u, u+\lambda v\rangle + \langle\lambda v, u+\lambda v\rangle\\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,\lambda v\rangle + \langle\lambda v,u\rangle + \langle\lambda v,\lambda v\rangle\\ &= \langle u,u\rangle + \lambda\langle u,v\rangle + \lambda\langle v,u\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle\\ &= \langle u,u\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle\end{aligned}$$

Notând cu $A = \langle v,v\rangle,\ B = \langle u,v\rangle,\ C = \langle u,u\rangle$, inegalitatea (2.1) devine

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Cum $A > 0$, inegalitatea de mai sus are loc pentru orice λ real doar dacă discriminantul

$$\Delta = 4B^2 - 4AC \leq 0$$

aşadar $B^2 \leq AC$, adică $\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle$

Definiţia 2.13. *Se numeşte* ***normă*** *pe spaţiul vectorial* V *o funcţie*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

care satisface condiţiile:

1. $\|v\| \geq 0,\ \forall v \in V;\ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
3. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall u,v \in V$

Definiţia 2.14. *Un spaţiu vectorial înzestrat cu o normă* $\|\cdot\|$ *se numeşte* ***spaţiu normat***.

Teorema 2.12. *Fie* $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian. Atunci funcţia*

$$\|\cdot\|:V\to\mathbb{R},\ \|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle},\ \ \forall v\in V$$

este o normă pe V*, numită* ***norma euclidiană*** *indusă de produsul scalar.*

Demonstraţie: Vom arăta că funcţia din enunţ satisface axiomele normei:

1. $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}\geq 0$ deoarece $\langle v,v\rangle\geq 0$
   $\|v\|=0\Leftrightarrow\langle v,v\rangle=0\Leftrightarrow v=0_V$
2. $\|\lambda v\|=\sqrt{\langle\lambda v,\lambda v\rangle}=\sqrt{\lambda^2\langle v,v\rangle}=|\lambda|\sqrt{\langle v,v\rangle}=|\lambda|\|v\|$
3. Pentru a demonstra că $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|,\ \forall u,v\in V$ folosim inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovski şi proprietăţile produsului scalar:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle=\\ &= \langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle=\\ &= \|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2\leq\|u\|^2+2|\langle u,v\rangle|+\|v\|^2\leq\\ &\leq \|u\|^2+2\sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}+\|v\|^2=\\ &= \|u\|^2+2\|u\|\cdot\|v\|+\|v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2\end{aligned}$$

   aşadar $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

- Din teorema anterioară rezultă că orice spaţiu vectorial euclidian este un spaţiu normat cu norma indusă de produsul scalar;
- într-un spaţiu vetorial normat, inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovski se poate rescrie sub forma

$$|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|\Leftrightarrow -1\leq\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\leq 1$$

Definiţia 2.15. *Fie* V *un spaţiu vectorial euclidian şi* $u,v\in V\smallsetminus\{0_V\}$*. Numărul* $\theta\in[0,\pi]$ *definit prin*

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

se numeşte ***unghiul*** *dintre vectorii* u *şi* v*.*

Definiţia 2.16. *Un vector se numeşte* ***versor*** *(sau vector unitar) dacă norma sa este 1.*

Orice vector $v \in V \setminus \{0_V\}$ are un vector unitar corespunzător, pe care îl notăm cu v^0 şi care poate fi obţinut astfel:

$$v^0 = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

Definiţia 2.17. *Se numeşte **distanţă** sau **metrică** pe mulţimea nevidă M o funcţie*

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

care satisface condiţiile:

1. $d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in M;\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in M$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),\ \forall x,y,z \in M$

Definiţia 2.18. *O mulţime M înzestrată cu o distanţă (metrică) d se numeşte **spaţiu metric**.*

Observaţie: Orice spaţiu vectorial normat este spaţiu metric cu *distanţa euclidiană* $d(u,v) = \|u - v\|$.

Definiţia 2.19. *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Doi vectori $u, v \in V$ se numesc **ortogonali** dacă produsul lor scalar $\langle u,v\rangle = 0$.*

Definiţia 2.20. *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian şi o mulţime de vectori $U \subset V$. Mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe vectorii din U:*

$$U^\perp = \{v \in V | \langle u,v\rangle = 0,\ \forall u \in U\}$$

*se numeşte **complementul ortogonal** al lui U şi este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Teorema 2.13. *Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Dacă vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \setminus \{0_V\}$ sunt ortogonali doi câte doi:*

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0,\ \forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j$$

atunci sunt liniar independenţi.

Demonstraţie: Considerăm combinaţia liniară nulă

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_1\rangle = \langle 0_V, v_1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1\langle v_1,v_1\rangle + \alpha_2\langle v_2,v_1\rangle + \cdots + \alpha_n\langle v_n,v_1\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1\|v_1\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Făcând produsul scalar al combinaţiei liniare cu vectorii $v_2, \ldots, v_n$ obţinem de asemenea $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definiţia 2.21. *Fie* $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional şi o bază* $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$.

1. *Baza B se numeşte* ***ortogonală*** *dacă* $e_1,\dots,e_n$ *sunt ortogonali doi câte doi:*
$$\langle e_i,e_j\rangle=0,\ \ \forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}, i\neq j$$
2. *Baza B se numeşte* ***ortonormată*** *dacă este ortogonală şi toţi vectorii din B au norma 1:*
$$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1, & \text{dacă } i=j\\ 0, & \text{dacă } i\neq j\end{cases},\ \forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}$$

Teorema 2.14 (Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt)**.** *Fie* $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional şi o bază* $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$. *Atunci se poate construi o bază ortonormată* $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ *pornind de la baza* B.

Demonstraţie: Construim mai întâi o bază ortogonală pornind de la baza B, iar apoi considerând versorii corespunzători se obţine baza ortonormată căutată.
Pasul 1: Definim $v_1=u_1$.
Pasul 2: Definim $v_2=u_2+\alpha_{21}v_1$, unde scalarul α_{21} se determină punând condiţia ca v_2 să fie ortogonal pe v_1:
$$0=\langle v_2,v_1\rangle=\langle u_2+\alpha_{21}v_1,v_1\rangle=\langle u_2,v_1\rangle+\alpha_{21}\langle v_1,v_1\rangle$$
de unde rezultă
$$\alpha_{21}=-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}$$
Pasul 3: Definim $v_3=u_3+\alpha_{31}v_1+\alpha_{32}v_2$, unde scalarii $\alpha_{31},\ \alpha_{32}$ se determină punând condiţia ca v_3 să fie ortogonal pe v_1 şi v_2:
$$0=\langle v_3,v_1\rangle=\langle u_3+\alpha_{31}v_1+\alpha_{32}v_2,v_1\rangle=\langle u_3,v_1\rangle+\alpha_{31}\langle v_1,v_1\rangle+\alpha_{32}\langle v_2,v_1\rangle$$
de unde observând că $\langle v_2,v_1\rangle=0$ rezultă $\alpha_{31}=-\dfrac{\langle u_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}$.
$$0=\langle v_3,v_2\rangle=\langle u_3+\alpha_{31}v_1+\alpha_{32}v_2,v_2\rangle=\langle u_3,v_2\rangle+\alpha_{31}\langle v_1,v_2\rangle+\alpha_{32}\langle v_2,v_2\rangle$$
de unde observând că $\langle v_1,v_2\rangle=0$ rezultă $\alpha_{32}=-\dfrac{\langle u_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}$.
După n paşi se obţine baza ortogonală $B'=\{v_1,\dots,v_n\}$. Considerând versorii corespunzători vectorilor din B' se obţine baza ortonormată $B_0=\{e_1,\dots,e_n\}$, unde $e_i=\dfrac{1}{\|e_i\|}\cdot e_i,\ i=1,\dots,n$.

2.6 Exerciţii

1. Care din următoarele submulţimi sunt subspaţii în $\mathbb{R}^3$?

   a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0\}$

   b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 1\}$

   c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 x_2 = 0\}$

   d) $\{(0, 0, 0)\}$

   e) $\{\alpha(1, 1, 0) + \beta(2, 0, 1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

   f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 - x_2 + 3x_1 = 0\}$

   g) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

2. Să se studieze dependenţa liniară a următorilor vectori:

   a) $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1), v_3 = (1, -3, 2) \in \mathbb{R}^3$

   b) $v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1), v_4 = (0, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$

   c) $v_1 = (2, 1, 3, 1), v_2 = (1, 2, 0, 1), v_3 = (-1, 1, -3, 0) \in \mathbb{R}^4$

   d) $v_1 = (2, 1, 3, -1), v_2 = (-1, 1, -3, 1), v_3 = (4, 5, 3, -1), v_4 = (1, 5, -3, 1)$

   e) $u_1 = v_1 + v_2,\ u_2 = v_1 + v_3,\ u_3 = v_2 + v_3$, unde v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi

   Rezolvare: a) Verificăm independenţa liniară cu definiţia:
   $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_1, 0) + (2\alpha_2, 0, \alpha_2) + (\alpha_3, -3\alpha_3, 2\alpha_3) = 0 \Rightarrow$
   $(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 3\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

   $$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ sistemul are soluţii nenule}$$

   deci vectorii sunt liniar dependenţi.
   $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ deci vectorii v_1, v_2 sunt independenţi, iar v_3 se poate scrie ca o combinaţie liniară de v_1, v_2 astfel: $v_3 = -3v_1 + 2v_2$

   b) Scriind vectorii pe coloanele unei matrice obţinem:
   $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 < 4$ deci vectorii sunt liniari dependenţi.

De asemenea observăm că $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ deci vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi, iar v_4 se poate scrie ca o combinaţie liniară de v_1, v_2, v_3 astfel:

$$v_4 = v_1 - v_2 + v_3$$

3. Să se găsească o bază în subspaţiul liniar al soluţiilor sistemelor omogene:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

Rezolvare: a) matricea sistemului $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ are rangul 2, alegem necunoscutele secundare $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta$ şi rezolvând sistemul în necunoscutele principale $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3\alpha + \beta \\ x_1 + x_2 = -\alpha + 3\beta \end{cases}$ obţinem
$\mathcal{S} = \{(\alpha+2\beta, -2\alpha+\beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha, 0) + (2\beta, \beta, 0, \beta) | \alpha, \beta\}$
$= \{\alpha(1, -2, 1, 0) + \beta(2, 1, 0, 1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = Sp\{(1, -2, 1, 0), (2, 1, 0, 1)\}$,
iar cum aceşti doi vectori sunt şi liniar independenţi, formează o bază în $\mathcal{S}$.

4. Să se arate că B este o bază în spaţiul liniar corespunzător şi să se scrie coordonatele vectorului v în această bază:

a) $B = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,3)\} \subset \mathbb{R}^3,\ v = (6, 9, 14)$

b) $B = \{(2,1,-3), (3,2,-5), (1,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3,\ v = (6, 2, -7)$

c) $B = \{(1,2,-1,-2), (2,3,0,-1), (1,2,1,4), (1,3,-1,0)\} \subset \mathbb{R}^4, v = (7, 14, -1, 2)$

d) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Rezolvare: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow B$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

$$v = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,2) + \alpha_3(1,2,3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 9 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$

5. Să se găsească matricele de trecere între următoarele baze:

   a) $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B_2 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$;

   b) $B_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$, $B_2 = \{(1,1,0),(-1,0,0),(0,0,1)\}$;

   c) $B_1 = \{(1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\}$, $B_2 = \{(3,1,4),(5,2,1),(1,1,-6)\}$;

   d) $B_1 = \{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3)\}$,
   $B_2 = \{(1,0,3,3),(-2,-3,-5,,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4)\}$ în $\mathbb{R}^4$;

   e) $B_1 = \{1,t,t^2,t^3\}$, $B_2 = \{1,t+1,(t+1)^2,(t+1)^3\}$ în spaţiul $\mathcal{P}_3[t]$ al polinoamelor de grad ≤ 3;

   Rezolvare: a) Notăm cu e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3 vectorii din cele două baze. Avem $\begin{cases} f_1 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ f_2 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3 \\ f_3 = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3 \end{cases}$ deci $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea de trecere de la B_1 la B_2. Pentru a găsi matricea de trecere de la B_2 la B_1 aflăm coordonatele vectorilor e_1, e_2, e_3 în baza B_2: $e_1 = \alpha_1\cdot f_1 + \alpha_2\cdot f_2 + \alpha_3\cdot f_3 \Rightarrow$

   $$(1,0,0) = (\alpha_1,\alpha_1,0) + (\alpha_2,0,\alpha_2) + (0,\alpha_3,\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

   $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -\frac{1}{2}$

   $$(0,1,0) = (\alpha_1,\alpha_1,0) + (\alpha_2,0,\alpha_2) + (0,\alpha_3,\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

   $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{2}$

   $$(0,0,1) = (\alpha_1,\alpha_1,0) + (\alpha_2,0,\alpha_2) + (0,\alpha_3,\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

   $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = -\frac{1}{2}$, deci matricea de trecere este $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6. Fie $\mathcal{P}$ spaţiul vectorial al tuturor polinoamelor reale definite pe $[-1,1]$. Să se arate că $\mathcal{P}$ este un spaţiu euclidian în raport cu aplicaţia definită prin:
$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)dx$$

7. Să se arate că aplicaţia
$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ \text{dată prin } \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

8. Să se arate că aplicaţia
$$d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ \text{dată prin } d(x,y) = \left|\ln\frac{x}{y}\right|$$
este o distanţă pe $\mathbb{R}_+$.

9. În $\mathbb{R}^4$ considerăm vectorii $x=(-2,5,1,3), y=(-1,-2,3,2), z=(-2,1,2,3)$. Să se calculeze $\langle x,y\rangle$, $\langle x,z\rangle$, $\langle y,z\rangle$, $\|x\|$, $\|y\|$, $\|z\|$, $\langle 2x-y, 3z+x\rangle$, $d(2x+y,-x+3z)$, $\|x-2y+z\|$.
Rezolvare:
$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle = (-2)\cdot(-1)+5\cdot(-2)+1\cdot 3+3\cdot 2 = 1\\
&\langle x,z\rangle = 20;\ \langle y,z\rangle = 12\\
&\|x\| = \sqrt{(-2)^2+5^2+1^2+3^2} = \sqrt{39};\ \|y\| = \sqrt{18} = \|z\|\\
&\langle 2x-y,3z+x\rangle = 6\langle x,z\rangle + 2\langle x,x\rangle - 3\langle y,z\rangle - \langle y,x\rangle = 161\\
&d(2x+y,-x+3z) = \|(2x+y)-(-x+3z)\| = \|3x+y-3z\| =\\
&= \|(-1,10,0,2)\| = \sqrt{105}\\
&\|x-2y+z\| = \sqrt{117}
\end{aligned}$$

10. În $\mathbb{R}^4$ considerăm vectorii $v_1=(2,1,-1,2)$, $v_2=(-2,3,-5,-1)$. Să se calculeze $\langle v_1,v_2\rangle$, $\|v_1\|$, $\|v_2\|$, $\langle 2v_1-v_2, v_1\rangle$, $\|v_1+2v_2\|$.

11. În $\mathbb{R}^6$ considerăm vectorii $v_1=(1,-2,3,-4,0,1)$, $v_2=(1,2,3,-1,-2,-4)$. Să se calculeze $\langle v_1,v_2\rangle$, $\|v_1\|$, $\|v_2\|$, $\sphericalangle(v_1,v_2)$, $d(v_1,v_2)$.

12. Să se verifice inegalitatea lui Cauchy-Schwarz pentru vectorii:

a) $x=(1,-1,-1,-1,1,2)$, $y=(2,-2,-3,3,2,1)$ în $\mathbb{R}^6$

b) $v_1 = (2, 1, -1, 2)$, $v_2 = (-2, 3, -5, -1)$ în $\mathbb{R}^4$

Să se afle versorii vectorilor de mai sus.
Rezolvare: $\langle x, y\rangle = 8$, $\|x\| = 3$, $\|y\| = \sqrt{31}$, iar $8 < 3\sqrt{31}$.
$x^0 = \dfrac{1}{\|x\|} \cdot x = \dfrac{1}{3}(1, -1, -1, -1, 1, 2)$; $y^0 = \dfrac{1}{\sqrt{31}}(2, -2, -3, 3, 2, 1)$.

13. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ găsiţi un vector v de normă 1 şi ortogonal pe vectorii:

a) $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (-3, 2, 0)$

b) $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (2, 1, 3)$

c) $u_1 = (1, 3, -4)$, $u_2 = (2, 3, -4)$

Rezolvare: Fie $v = (x_1, x_2, x_3)$. Obţinem:
a) $\begin{cases} \langle v, u_1\rangle = 0 \\ \langle v, u_2\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow v = (0, 0, 1)$ sau $v = (0, 0, -1)$.
b) $\begin{cases} \langle v, u_1\rangle = 0 \\ \langle v, u_2\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = (-4\alpha, 5\alpha, \alpha)$. Punând condiţia $\|v\| = 1 \Rightarrow 42\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{42}}$.

14. Să se construiască o bază ortonormată pornind de la baza:

(a) $\{(1, 0, 2), (2, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ în $\mathbb{R}^3$
Rezolvare: Notăm cu $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (2, 1, 1), u_3 = (0, 1, 1)$.
Pasul 1: Definim $v_1 = u_1 = (1, 0, 2)$.
Pasul 2: Definim $v_2 = u_2 + \alpha_{21}v_1$. $\langle v_2, v_1\rangle = 0 \Rightarrow$
$0 = \langle u_2 + \alpha_{21}v_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_1\rangle + \alpha_{21}\langle v_1, v_1\rangle \Rightarrow \alpha_{21} = -\dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = -\dfrac{4}{5}$
$\Rightarrow v_2 = (2, 1, 1) - \frac{4}{5}(1, 0, 2) = \left(\frac{6}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right)$
Pasul 3: Definim $v_3 = u_3 + \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2$. $\langle v_3, v_1\rangle = 0 \Rightarrow$
$0 = \langle u_3 + \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2, v_1\rangle = \langle u_3, v_1\rangle + \alpha_{31}\langle v_1, v_1\rangle + \alpha_{32}\langle v_2, v_1\rangle$
$\alpha_{31} = -\dfrac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = -\dfrac{2}{5}$. $\langle v_3, v_2\rangle = 0 \Rightarrow$
$0 = \langle u_3 + \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2, v_2\rangle = \langle u_3, v_2\rangle + \alpha_{31}\langle v_1, v_2\rangle + \alpha_{32}\langle v_2, v_2\rangle$
$\alpha_{32} = -\dfrac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow v_3 = (0, 1, 1) - \dfrac{2}{5}(1, 0, 2) - \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{6}{5}, 1, -\dfrac{3}{5}\right)$.
Am obţinut baza ortogonală formată din vectorii $v_1 = (1, 0, 2)$,

$v_2 = \left(\frac{6}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}(6,5,-3)$, $v_3 = \left(-\frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{7}(-2,3,1)$. Baza ortonormată căutată este formată din versorii acestor vectori:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ e_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6,5,-3) = \left(\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{-3}{\sqrt{70}}\right) \\ e_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2,3,1) = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right) \end{aligned}$$

(b) $\{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,-1)\}$ în $\mathbb{R}^3$

(c) $\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ în $\mathbb{R}^3$

(d) $\{(-1,0,2),(1,-1,1),(2,1,0)\}$ în $\mathbb{R}^3$

(e) $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ în $\mathbb{R}^4$

(f) $\{1, X, X^2\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$

15. Să se găsească complementele ortogonale ale următoarelor subspaţii din $\mathbb{R}^3$:

a) $U_1 = \mathrm{Sp}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

b) $U_2 = \mathrm{Sp}\{(1,1,1),(0,0,1),(1,1,0)\}$

c) $U_3 = \mathrm{Sp}\{(1,2,1),(3,6,3)\}$

Rezolvare: Punând condiţia ca vectorul $v = (x_1, x_2, x_3)$ să fie ortogonal pe generatorii subspaţiului se obţine:

a) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow U_1^{\perp} = \{(0,0,\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Sp}\{(0,0,1)\}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow U_2^{\perp} = \{(-\alpha,\alpha,0) | \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Sp}\{(-1,1,0)\}$

Capitolul 3

Transformări liniare

3.1 Definiţii şi proprietăţi

Definiţia 3.1. *Fie V şi W două spaţii vectoriale reale. O funcţie $T : V \to W$ se numeşte* ***transformare liniară*** *(sau* ***operator liniar****, sau* ***aplicaţie liniară****, sau* ***morfism*** *de spaţii vectoriale) dacă îndeplineşte următoarele condiţii:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v), \ \forall u, v \in V$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in V$

- Dacă aplicaţia liniară T este bijectivă, se numeşte *izomorfism* de spaţii vectoriale.
- Dacă $V = W$, atunci T se numeşte *endomorfism* al lui V.
- Un endomorfism bijectiv se numeşte *automorfism.*

Vom nota cu $\mathcal{L}(V, W)$ mulţimea aplicaţiilor liniare de la V la W şi cu $\mathcal{L}(V)$ mulţimea endomorfismelor lui V.

Propoziţia 3.1.1. *O funcţie $T : V \to W$ este transformare liniară dacă şi numai dacă*

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in V. \tag{3.1}$$

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" Presupunem că T este liniară. Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in V$ oarecare avem: $T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha u) + T(\beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$
"$\Leftarrow$" Presupunem că (3.1) este satisfăcută. Punând $\alpha = \beta = 1$ se obţine prima condiţie din definiţia transformării liniare, iar punând $\beta = 0$ se obţine cea de a doua.

Exemplu:

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,x_1-x_3,x_2+2x_3)$$

este o transformare liniară.

Propoziţia 3.1.2. *Pentru o transformare liniară $T:V\to W$ avem:*

a) $T(0_V)=0_W$

b) $T(-v)=-T(v),\ \forall v\in V$

c) $T\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i),\ \forall\alpha_i\in\mathbb{R},v_i\in V,i=1,\dots,n.$

Teorema 3.1. *Mulţimea transformărilor liniare $\mathcal{L}(V,W)$ împreună cu adunarea şi înmulţirea funcţiilor cu scalari formează un spaţiu vectorial real.*

Teorema 3.2. *Dacă U,V,W sunt trei spaţii vectoriale reale, şi $T_1\in\mathcal{L}(U,V)$, $T_2\in\mathcal{L}(V,W)$, atunci $T_2\circ T_1\in\mathcal{L}(U,W)$.*

Teorema 3.3. *Fie $T\in\mathcal{L}(V,W)$. Atunci avem:*

1. *Dacă U este un subspaţiu vectorial al lui V, atunci*

$$T(U)=\{w\in W|\exists u\in U,\ T(u)=w\}\subset W$$

este un subspaţiu vectorial al lui W.

2. *Dacă $\bar{U}$ este un subspaţiu vectorial al lui W, atunci*

$$T^{-1}(\bar{U})=\{v\in V|T(v)\in\bar{U}\}\subset V$$

este un subspaţiu vectorial al lui V.

Definiţia 3.2. *Fie $T\in\mathcal{L}(V,W)$.*

1. *Mulţimea*

$$\ker T=\{v\in V|T(v)=0\}\subset V$$

*se numeşte **nucleul** lui T.*

2. *Mulţimea*

$$\operatorname{im}T=\{w\in W|\exists v\in V,\ T(v)=w\}\subset W$$

*se numeşte **imaginea** lui T.*

Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare $T \in \mathcal{L}(V, W)$ sunt subspaţii vectoriale ale lui V, respectiv W. Dimensiunile acestor subspaţii se numesc *rangul*, respectiv *defectul* lui T, şi între ele există următoarea relaţie:

$$\operatorname{rang} T + \operatorname{def} T = n$$

unde n este dimensiunea lui V.

Teorema 3.4. *Fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci:*

1. *T este injectivă dacă şi numai dacă $\ker T = \{0_V\}$*
2. *T este surjectivă dacă şi numai dacă $\operatorname{im} T = W$.*

Teorema 3.5.

1. *Dacă $T \in \mathcal{L}(V, W)$ este un izomorfism de spaţii vectoriale, atunci şi aplicaţia inversă $T^{-1} : W \to V$ este o aplicaţie liniară.*
2. *Spaţiile vectoriale V şi W sunt izomorfe dacă şi numai dacă* $\dim V = \dim W$.

3.2 Matricea unei transformări liniare

Fie V şi W două spaţii vectoriale de dimensiuni n, respectiv m, şi $T : V \to W$ o transformare liniară. Considerăm de asemenea bazele $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V şi $B' = \{f_1, \dots, f_m\}$ în W. Vectorii $T(e_1), \dots, T(e_n)$ din W pot fi scrişi în baza B' astfel:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \cdots + a_{m1} f_m \\ T(e_2) &= a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \cdots + a_{m2} f_m \\ &\vdots \\ T(e_n) &= a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \cdots + a_{mn} f_m \end{aligned}$$

Definiţia 3.3. *Matricea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

*care are pe coloane componentele vectorilor $T(e_1), \dots, T(e_n)$ în baza B' se numeşte **matricea lui T în raport cu bazele** B **şi** B'.*

Exemplu: Matricea transformării liniare

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,x_1-x_3,x_2+2x_3)$$

în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Teorema 3.6. *Fie $T\in\mathcal{L}(V,W)$, $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ bază în V, $B'=\{f_1,\dots,f_m\}$ bază în W, şi A matricea lui T în raport cu bazele B şi B'. Dacă $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ şi $y=T(x)=\sum_{i=1}^{m}y_if_i$, atunci avem:*

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Exemplu: Pentru $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,x_1-x_3,x_2+2x_3)$, avem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1+x_2\\ x_1-x_3\\ x_2+2x_3\end{pmatrix}.$$

Teorema 3.7. *Fie $T\in\mathcal{L}(V,W)$, $B,\bar{B}$ două baze în V, $B',\bar{B}'$ două baze în W, şi A matricea lui T în raport cu bazele B şi B'. Atunci matricea lui T în raport cu bazele $\bar{B}$ şi $\bar{B}'$ este:*

$$\bar{A}=S^{-1}_{B'\bar{B}'}AS_{B\bar{B}}$$

unde $S_{B\bar{B}}$ este matricea de trecere de la B la $\bar{B}$ şi $S_{B'\bar{B}'}$ este matricea de trecere de la B' la $\bar{B}'$.

Exemplu: Pentru transformarea liniară

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,x_1-x_3,x_2+2x_3),$$

considerăm $B=B'$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$ şi $\bar{B}=\bar{B}'=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ Matricea de trecere de la B la $\bar{B}$ este $S_{B\bar{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, iar inversa acesteia este $S^{-1}_{B\bar{B}}=\begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & -\frac12\\ \frac12 & -\frac12 & \frac12\\ -\frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}$. Conform teoremei anterioare, matricea transformării T în baza $\bar{B}$ este

$$\bar{A} = S^{-1}_{B'\bar{B}'} A S_{B\bar{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de unde se obţine $\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Verificare: $T(1,0,1) = (2,0,2) = 2 \cdot (1,0,1)$.

3.3 Valori şi vectori proprii

Definiţia 3.4. *Fie V un spaţiu vectorial şi $T \in \mathcal{L}(V)$ un endomorfism.*

1. *Un vector $v \in V$, $v \neq 0_V$ se numeşte **vector propriu** al lui T dacă există un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$T(v) = \lambda v.$$

2. *Un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care există $v \in V \setminus \{0_V\}$ astfel încât $T(v) = \lambda v$ se numeşte **valoare proprie** a lui T.*

3. *Mulţimea tuturor valorilor proprii ale unui endomorfism poartă denumirea de **spectrul** lui T şi se notează cu $\sigma(T)$.*

Definiţia 3.5. *Fie V un spaţiu vectorial şi $T \in \mathcal{L}(V)$ un endomorfism. Un subspaţiu vectorial $U \subseteq V$ se numeşte **subspaţiu invariant** în raport cu T dacă $T(U) \subseteq U$.*

Teorema 3.8. *Fie V un spaţiu vectorial şi $T \in \mathcal{L}(V)$ un endomorfism al lui V. Dacă λ este o valoare proprie a lui T, atunci mulţimea vectorilor proprii corespunzători lui λ*

$$V_\lambda = \{v \in V | T(v) = \lambda v\}$$

*este un subspaţiu vectorial invariant în raport cu T, numit **subspaţiu propriu** asociat valorii proprii λ.*

Teorema 3.9. *Vectorii proprii ai lui T corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenţi.*

Fie V un spaţiu vectorial, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază în V, $T \in \mathcal{L}(V)$ un endomorfism, şi $\lambda \in \sigma(T)$. Considerăm A matricea lui T în baza B, şi $v \in V_\lambda$. În baza B, vectorul v se scrie

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

iar egalitatea $T(v) = \lambda v$ devine

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cum $v \neq 0_V$, rezultă că sistemul de mai sus admite soluţii nebanale,
deci $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Definiţia 3.6. *Polinomul cu coeficienţi reali*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

se numeşte ***polinomul caracteristic*** *al lui T. Ecuaţia*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

se numeşte ***ecuaţia caracteristică*** *a lui T.*

Polinomul caracteristic al unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ nu depinde de baza în care este scrisă matricea A a lui T, iar rădăcinile reale ale acestui polinom sunt chiar valorile proprii ale lui T.

Ordinul de multiplicitate (ca rădăcină a polinomului caracteristic) al unei valori proprii $\lambda \in \sigma(T)$ se numeşte *multiplicitate algebrică* a lui λ, iar dimensiunea subspaţiului de vectori proprii corespunzător lui $\lambda \in \sigma(T)$ se numeşte *multiplicitate geometrică* a lui λ.

Teorema 3.10. *Fie V un spaţiu vectorial real, $T \in \mathcal{L}(V)$, şi $\lambda \in \sigma(T)$. Atunci multiplicitatea geometrică a lui λ este cel mult egală cu multiplicitatea algebrică a lui λ.*

Exemplu: Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dată prin

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + x_3)$$

Valorile proprii ale lui T se găsesc rezolvând ecuaţia caracteristică, sau echivalent aflând rădăcinile polinomului caracteristic.

Matricea transformării T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic este:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 1 + (4-\lambda) + (1-\lambda) = \\ &= (4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 2(3-\lambda) = \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = \\ &= (3-\lambda)^2(2-\lambda) \end{aligned}$$

aşadar valorile proprii ale lui T sunt $\lambda_{1,2} = 3$ şi $\lambda_3 = 2$.

Vectorii proprii se găsesc înlocuind pe λ cu valorile proprii găsite în

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şi rezolvând sistemul omogen corespunzător.

$$\lambda_{1,2} = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = \alpha \Rightarrow x_1 = \alpha, x_2 = 2\alpha \Rightarrow V_{\lambda_{1,2}} = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} = Sp\{(1,2,1)\}$

$$\lambda_3 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = \alpha \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \alpha \Rightarrow V_{\lambda_3} = \{(0, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} = Sp\{(0,1,1)\}$

Definiţia 3.7. *Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ se numeşte **diagonalizabil** dacă există o bază a lui V astfel încât matricea lui T în această bază să fie diagonală.*

Teorema 3.11. *Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă există o bază a lui V formată numai din vectori proprii ai lui T.*

În cazul în care este diagonalizabil, matricea endomorfismului $T \in \mathcal{L}(V)$ are pe diagonală valorile proprii corespunzătoare vectorilor proprii din bază.

Teorema 3.12. *Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă orice valoare proprie $\lambda \in \sigma(T)$ are multiplicităţile algebrică şi geometrică egale.*

Exemplu: Fie endomorfismul

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

Matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (2-\lambda)(1+\lambda)^2$

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$x_3 = \alpha \Rightarrow x_1 = \alpha, x_2 = \alpha \Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} = Sp\{(1,1,1)\}$

$\lambda_{2,3} = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$x_2 = \alpha, x_3 = \beta \Rightarrow x_1 = -\alpha - \beta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} V_{\lambda_{2,3}} &= \{(-\alpha-\beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(-\alpha, \alpha, 0) + (-\beta, 0, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{\alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= Sp\{(-1,1,0), (-1,0,1)\} \end{aligned}$$

Notăm cu $v_1 = (1,1,1), v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1)$ vectorii proprii care generează subspaţiile proprii şi observăm că $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$. Pentru a găsi matricea endomorfismului T în această bază scriem:

$\begin{cases} T(v_1) = \lambda_1 v_1 = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_2) = \lambda_{2,3} v_2 = 0 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ T(v_3) = \lambda_{2,3} v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 \end{cases} \Rightarrow$

$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ este matricea lui T în baza B.

3.4 Endomorfisme pe spaţii euclidiene

Definiţia 3.8. *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Transformarea liniară $T^* : V \to V$ se numeşte **adjuncta** transformării T*

dacă:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle,\ \forall u, v \in V.$$

Definiţia 3.9. *Endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V)$ se numeşte* ***autoadjunct*** *dacă $T = T^*$, adică satisface relaţia*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle,\ \forall u, v \in V.$$

Teorema 3.13. *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian şi $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V. Atunci endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V)$ este autoadjunct dacă şi numai dacă matricea lui T în raport cu baza B este simetrică.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$"
Fie A matricea lui T în raport cu baza B. Atunci avem

$$T(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

Cum T este autoadjunct iar baza B este ortonormată, avem

$$\langle T(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, T(e_j)\rangle \Leftrightarrow \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j\rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\rangle$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\langle e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\langle e_i, e_k\rangle \Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij},\ \forall i, j = 1, \dots, n$$

"$\Leftarrow$"
Fie A matricea lui T în raport cu baza B. Dacă A este simetrică, atunci

$$a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j = 1, \dots, n$$

Făcând raţionamentul anterior în sens invers obţinem

$$\langle T(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, T(e_j)\rangle,\ \forall i, j = 1, \dots, n$$

Fie acum $u, v \in V$ având în baza B coordonatele

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ şi } v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

Folosind proprietăţile produsului scalar obţinem

$$\langle T(u), v\rangle = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle T(e_i), e_j\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, T(e_j)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, T\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\right\rangle = \langle u, T(v)\rangle$$

Teorema 3.14. *Fie* $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian. Dacă endomorfismul* $T \in \mathcal{L}(V)$ *este autoadjunct , atunci vectorii proprii ai lui* T *corespunzători la valori proprii diferite sunt ortogonali.*

Demonstraţie: Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(T)$ valori proprii distincte şi v_1, v_2 vectori proprii corespunzători , deci

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 \text{ şi } T(v_2) = \lambda_2 v_2$$

Cum T este autoadjunctă, obţinem

$$\langle T(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, T(v_2)\rangle \Leftrightarrow \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$$

aşadar

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0$$

iar cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$ rezultă

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0$$

Teorema 3.15. *Fie* $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian. Dacă endomorfismul* $T \in \mathcal{L}(V)$ *este autoadjunct , atunci există o bază ortonormată* B *formată din vectori proprii ai lui* T.

Corolar 3.4.1. *Dacă matricea endomorfismului* $T \in \mathcal{L}(V)$ *într-o bază ortonormată este simetrică, atunci* T *este diagonalizabil.*

Demonstraţie:
Dacă matricea endomorfismului $T \in \mathcal{L}(V)$ într-o bază ortonormată este simetrică, atunci T este un endomorfism autoadjunct , iar conform teoremei anterioare există o bază ortonormată B formată din vectori proprii ai lui T, de unde rezultă că T este diagonalizabil.

Definiţia 3.10. *Fie* $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu vectorial euclidian. Endomorfismul* $T \in \mathcal{L}(V)$ *se numeşte* ***ortogonal*** *(sau* ***transformare ortogonală****) dacă păstrează produsul scalar, adică:*

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle,\ \ \forall u, v \in V$$

Propoziţia 3.4.1. *Un endomorfism ortogonal* $T \in \mathcal{L}(V)$ *păstrează norma vectorilor, distanţele şi unghiurile dintre vectori.*

Demonstraţie: Cum T este ortogonal, pentru $v = u$ obţinem

$$\langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle \Leftrightarrow \|T(u)\| = \|u\|,\ \ \forall u \in V$$

Pentru $u = x - y$ obţinem

$$\|T(x-y)\| = \|x-y\| \Leftrightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|x-y\|$$

adică $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$, deci T păstrează distanţa între vectori. Dacă θ este unghiul dintre vectorii x şi y avem

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\langle T(x), T(y)\rangle}{\|T(x)\| \cdot \|T(y)\|} = \cos\varphi$$

unde φ este unghiul dintre $T(x)$ şi $T(y)$.

Teorema 3.16. *Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian şi endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *T este o transformare ortogonală*

2. *T transformă orice bază ortonormată a lui V tot într-o bază ortonormată.*

3. *Dacă A este matricea lui T într-o bază ortonormată B, atunci $A^T = A^{-1}$, sau*
$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$$

Definiţia 3.11. *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte* ***matrice ortogonală*** *dacă este inversabilă şi $A^{-1} = A^T$.*

Propoziţia 3.4.2. *Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice ortogonală, atunci* $\det A = \pm 1$

Demonstraţie: A matrice ortogonală $\Rightarrow A \cdot A^T = I_n$. Aplicând proprietăţile determinanţilor obţinem:

$$\det(A \cdot A^T) = \det I_n \Rightarrow \det A \cdot \det A^T = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

aşadar $\det A = \pm 1$.

Exemplu: Fie transformarea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4x_2 - 8x_3, -4x_1 + 7x_2 - 4x_3, -8x_1 - 4x_2 + x_3)$$

Notăm cu $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ vectorii bazei canonice, care este o bază ortonormată. Găsim

$$T(e_1) = (1, -4, -8),\ T(e_2) = (-4, 7, -4),\ T(e_3) = (-8, -4, 1),$$

deci matricea lui T în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, aşadar T este o transformare autoadjunctă , deci este diagonalizabilă . Pentru a găsi forma diagonală calculăm valorile şi vectorii proprii.

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -(\lambda - 9)^2(\lambda + 9)$$

aşadar valorile proprii sunt $\lambda_{1,2} = 9$ şi $\lambda_3 = -9$.

$\lambda_{1,2} = 9 \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$x_1 = \alpha, x_3 = \beta \Rightarrow x_2 = -2\alpha - 2\beta \Rightarrow V_{\lambda_{1,2}} = Sp\{(1,-2,0),(0,-2,1)\}$

$\lambda_{1,2} = -9 \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 \\ -4 & 16 & -4 \\ -8 & -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

$x_2 = \alpha \Rightarrow x_1 = x_3 = 2\alpha \Rightarrow V_{\lambda_3} = Sp\{(2,1,2)\}$

Notăm vectorii proprii care generează cele 2 subspaţii proprii cu

$$u_1 = (1,-2,0), u_2 = (0,-2,1), u_3 = (2,1,2)$$

şi construim o bază ortonormată pornind de la aceşti vectori.

1. $v_1 = u_1 = (1,-2,0)$
2. $v_2 = u_2 + \lambda_{21}v_1 = (0,-2,1) - \frac{4}{5}(1,-2,0) = -\frac{1}{5}(4,2,-5)$
3. $v_3 = u_3 = (2,1,2)$ (u_3 este vector propriu corespunzător unei valori proprii diferite, deci este deja ortogonal pe v_1 şi v_2).

Versorii corespunzători acestor 3 vectori:

$$f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right),\ f_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}\right), f_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

formează o bază ortonormată din vectori proprii.

Transformarea ortogonală care transformă baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ din $\mathbb{R}^3$ în baza ortonormată $\bar{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ va avea matricea care are pe coloane coordonatele lui f_1, f_2 şi f_3, adică matricea de trecere de la baza B

la baza $\bar{B}$:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

deci expresia analitică a acestei transformări ortogonale este

$$\bar{T}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{5}} + \frac{4x_2}{3\sqrt{5}} + \frac{2x_3}{3}, -\frac{2x_1}{\sqrt{5}} + \frac{2x_2}{3\sqrt{5}} + \frac{x_3}{3}, -\frac{5x_2}{3\sqrt{5}} + \frac{2x_3}{3}\right).$$

3.5 Exerciţii

1. Fie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4)$

   a) Să se arate că T este liniară

   b) Să se scrie matricea lui T în bazele canonice din $\mathbb{R}^4$ şi $\mathbb{R}^2$.

   c) Să se găsească $\ker T$ şi $\mathrm{im} T$

   Rezolvare: a) Fie $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3 - \alpha x_4 - \beta y_4) = \\ &= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_3 - \alpha x_4) + (\beta y_1 + \beta y_2, \beta y_3 - \beta y_4) = \\ &= \alpha(x_1 + x_2, x_3 - x_4) + \beta(y_1 + y_2, y_3 - y_4) = \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$

   b) Fie $B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $B_2 = \{f_1, f_2\}$ bazele canonice din $\mathbb{R}^4$ şi $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} T(e_1) = T(1,0,0,0) = (1,0) = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 \\ T(e_2) = T(0,1,0,0) = (1,0) = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 \\ T(e_3) = T(0,0,1,0) = (0,1) = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 \\ T(e_4) = T(0,0,0,1) = (0,-1) = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 \end{cases} \Rightarrow$$

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este matricea lui T în bazele canonice.

   c) $\ker T = \{x \in \mathbb{R}^4 | T(x) = 0\}$. Se obţine sistemul omogen $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Avem rang $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$. Alegem necunoscutele secundare $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ şi găsim $x_1 = -\alpha$, $x_4 = \beta$, deci

$$\begin{aligned}\ker T &= \{(-\alpha,\alpha,\beta,\beta) | \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(-\alpha,\alpha,0,0) + (0,0,\beta,\beta) | \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{\alpha(-1,1,0,0) + \beta(0,0,1,1) | \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \mathrm{Sp}\{(-1,1,0,0),(0,0,1,1)\}.\end{aligned}$$

$\mathrm{im}T = \{y \in \mathbb{R}^2 | \exists x \in \mathbb{R}^4, T(x) = y\}$

$$T(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_3 - x_4 = y_2 \end{cases}$$

aşadar $\mathrm{im}T$ este mulţimea vectorilor (y_1, y_2) pentru care sistemul anterior este compatibil. Cum rangul matricei sistemului este 2 iar adăugând coloana termenilor liberi rangul matricei extinse nu creşte, sistemul anterior este compatibil pentru orice $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, deci $\mathrm{im}T = \mathbb{R}^2$.

2. Fie $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^4$ şi transformarea liniară $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definită prin $T(e_1) = e_2 + e_3$, $T(e_2) = e_3 + e_4$, $T(e_3) = e_4 + e_1$, $T(e_4) = e_1 + e_2$. Să se găsească:

   a) $T(1,2,3,4)$

   b) matricea lui T în baza canonică

   c) $\ker T$ şi $\mathrm{im}T$

   Rezolvare: a)

$$\begin{aligned}T(1,2,3,4) &= T(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4) = \\ &= T(e_1) + 2T(e_2) + 3T(e_3) + 4T(e_4)) = \\ &= e_2 + e_3 + 2(e_3 + e_4) + 3(e_4 + e_1) + 4(e_1 + e_2) = \\ &= 7e_1 + 5e_2 + 3e_3 + 5e_4 = \\ &= (7,5,3,5).\end{aligned}$$

   b) Avem:

$$\begin{cases} T(e_1) = e_2 + e_3 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \\ T(e_2) = e_3 + e_4 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4 \\ T(e_3) = e_4 + e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4 \\ T(e_4) = e_1 + e_2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 \end{cases}$$

deci matricea lui T în baza canonică este $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $T(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Rangul matricei este 3, alegem necunoscuta secundară $x_4 = \alpha$ şi obţinem $x_1 = -\alpha, x_2 = \alpha, x_3 = -\alpha$, deci

$$\ker T = \{(-\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^4 | \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Sp}\{(-1, 1, -1, 1)\}.$$

$T(x) = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 1 & 1 & y_4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}T = \mathrm{Sp}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$.

3. Fie transformările liniare $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definite prin:

$$T_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$$
$$T_2(y_1, y_2) = (y_1 + y_2, y_1, y_2, 2y_1 - y_2)$$

Să se găsească matricele lui T_1, T_2 şi $T_2 \circ T_1$ în bazele canonice, precum şi nucleele acestor aplicaţii.

Rezolvare: $A_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$T_2 \circ T_1(x_1, x_2, x_3) = T_2(T_1(x_1, x_2, x_3)) = T_2(x_1 + x_3, x_1 + x_2 - x_3) =$
$= (x_1 + x_3 + x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2(x_1 + x_3) - (x_1 + x_2 - x_3)) =$
$= (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$

şi obţinem $A_{T_2 \circ T_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A_{T_2} \cdot A_{T_1}$.

$T_1(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, rang$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$,

$x_3 = \alpha \Rightarrow x_1 = -\alpha, x_2 = 2\alpha \Rightarrow \ker T_1 = \mathrm{Sp}\{(-1,2,1)\}$

$$T_2(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ 2y_1 - y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker T_2 = \{(0,0)\}$$

$$T_2 \circ T_1(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}, \ \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$x_3 = \alpha \Rightarrow x_1 = -\alpha, \ x_2 = 2\alpha \Rightarrow \ker T_2 \circ T_1 = \mathrm{Sp}\{(-1,2,1)\}$.

4. Fie în $\mathbb{R}^3$ baza $B_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ şi transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care are în baza B_1 matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se găsească expresia analitică a lui $T(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, precum şi matricea lui T în baza $B_2 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

Rezolvare: Notăm $f_1 = (1,1,1), f_2 = (0,1,1), f_3 = (0,0,1)\}$. Avem:

$$\begin{cases} T(f_1) = 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 = (1,3,3) \\ T(f_2) = 2 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3 = (2,2,3) \\ T(f_3) = 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + (-1) \cdot f_3 = (1,2,1) \end{cases}$$

Aflăm coordonatele unui vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ în baza B_1:

$$x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x_1 \\ \alpha_2 = x_2 - x_1 \\ \alpha_3 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$T(x) = T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3) = \alpha_1 T(f_1) + \alpha_2 T(f_2) + \alpha_3 T(f_3) =$$
$$= x_1 \cdot (1,3,3) + (x_2 - x_1) \cdot (2,2,3) + (x_3 - x_2) \cdot (1,2,1)$$

Se obţine $T(x) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_3, 2x_2 + x_3)$.
Notăm $g_1 = (1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1)\}$. Avem:

$$\begin{cases} T(g_1) = T(1,0,0) = (-1,1,0) \\ T(g_2) = T(1,1,0) = (0,1,2) \\ T(g_3) = T(1,1,1) = (1,3,3) \end{cases}.$$

Matricea în baza B_2 va avea pe coloane coordonatele acestor vectori în baza B_2 :

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = (-1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases} ; \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

Aşadar matricea lui T în baza B_2 este $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. Fie transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ astfel încât $T(0,0,1) = (2,3,5)$, $T(0,1,1) = (1,0,0)$, $T(1,1,1) = (0,1,-1)$. Care este matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$?

6. Fie baza $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ în spaţiul vectorial $\mathbb{R}_n[X]$ şi transformarea liniară $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ definită prin

$$T(P(X)) = P(X+1) - P(X)$$

Să se scrie matricea lui T în baza de mai sus.

7. Determinaţi valorile şi vectorii proprii pentru transformările liniare având următoarele matrice în baza canonică din $\mathbb{R}^3$:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ c)\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};$$

$$d)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix};\ e)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix};$$

R: a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1,\ Sp\{(1,1,-1)\}$;
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ Sp\{(1,2,0),(0,0,1)\}$;
c) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, Sp\{(1,1,1)\}, Sp\{(1,2,3)\}$;
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ Sp\{(3,1,1)\}$;
e) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1, Sp\{(1,2,2)\}, Sp\{(1,2,1)\}$

8. Să se reducă la forma diagonală matricele următoare, specificând şi bazele în care au această formă:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix};\ c)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

R: a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4,\ B = \{(2,1,-2),(1,2,2),(2,-2,1)\}$;
b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 2$;
c) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 4$;

9. Determinaţi care din următoarele transformări liniare (date prin matricele lor în baza canonică) pot fi diagonalizate:

$$a)\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix};\ c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ e)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R: a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,-3)\}$
b) nu poate fi diagonalizată
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2,\ B = \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,-1,-1,-1)\}$
d) nu poate fi diagonalizată
e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1,\ B = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}$

10. Să se verifice care dintre următoarele transformări sunt autoadjuncte:

   (a) $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

   (b) $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3)$

   (c) $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, x_2 + x_3)$

11. Să se verifice care dintre următoarele transformări sunt ortogonale:

   (a) $T(x_1,x_2,x_3) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3, \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)$

   (b) $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$

   (c) $T(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)$

Capitolul 4

Forme biliniare. Forme pătratice

4.1 Forme biliniare

Definiţia 4.1. *Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n. O aplicaţie $F : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte **formă biliniară** pe V dacă satisface condiţiile:*

1. $F(x+y,z) = F(x,z) + F(y,z),\ \forall x,y,z \in V$
2. $F(\alpha x,y) = \alpha F(x,y),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x,y \in V$
3. $F(x,y+z) = F(x,y) + F(x,z),\ \forall x,y,z \in V$
4. $F(x,\alpha y) = \alpha F(x,y),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x,y \in V$

Cele patru condiţii din definiţia unei forme biliniare sunt echivalente cu următoarele două:

$$F(\alpha x+\beta y,z) = \alpha F(x,z) + \beta F(y,z),\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, x,y,z \in V$$
$$F(x,\alpha y+\beta z) = \alpha F(x,y) + \beta F(x,z),\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, x,y,z \in V$$

Exemple

1. Orice produs scalar este o formă biliniară
2. Fie $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1,\ \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pentru $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ avem:

$$\begin{aligned} F(\alpha x + \beta y, z) &= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2)) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 = \\ &= \alpha(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \beta(y_1 z_2 - y_2 z_1) = \\ &= \alpha F(x, z) + \beta F(y, z). \end{aligned}$$

În mod analog se arată că

$$F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z).$$

Să considerăm acum un spaţiu vectorial V, o bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V şi forma biliniară $F : V \times V \to \mathbb{R}$. Fie de asemenea doi vectori oarecare $x, y \in V$ exprimaţi în baza B astfel:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n,\ y_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

Folosind proprietăţile de liniaritate ale lui F obţinem:

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{4.1}$$

unde $a_{ij} = F(e_i, e_j),\ i, j = 1, 2, \dots, n$.

Definiţia 4.2. *Fie $F : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară pe spaţiul vectorial V şi $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V. Matricea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*unde $a_{ij} = F(e_i, e_j),\ i, j = 1, 2, \dots, n$, se numeşte **matricea formei biliniare** F în baza B.*

Exemplu: Pentru forma biliniară $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ avem:

$$\begin{cases} a_{11} = F(e_1, e_1) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0 \\ a_{12} = F(e_1, e_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \\ a_{21} = F(e_2, e_1) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \\ a_{22} = F(e_2, e_2) = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

deci matricea formei biliniare este $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dacă introducem notaţiile

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

atunci (4.1) devine

$$F(x, y) = X^T AY.$$

Teorema 4.1. *Fie $F : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară pe spaţiul vectorial V şi două baze $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\bar{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ în V. Fie $S_{B\bar{B}}$ matricea de trecere de la B la $\bar{B}$ şi $A, \bar{A}$ matricele formei biliniare F în raport cu bazele B, respectiv $\bar{B}$. Atunci avem:*

$$\bar{A} = S_{B\bar{B}}^T A S_{B\bar{B}}$$

Demonstraţie: Expresia formei biliniare F în bazele B şi $\bar{B}$ este

$$F(x, y) = X^T \cdot A \cdot Y = \bar{X}^T \cdot \bar{A} \cdot \bar{Y}$$

unde X şi Y sunt matricele coloană ale coordonatelor vectorilor x şi y în baza B, iar $\bar{X}$ şi $\bar{Y}$ matricele coloană ale coordonatelor vectorilor x şi y în baza $\bar{B}$. Avem:

$$X = S_{B\bar{B}} \bar{X} \text{ şi } Y = S_{B\bar{B}} \bar{Y}$$

Înlocuind în expresia lui $F(x, y)$ obţinem

$$F(x, y) = (S_{B\bar{B}} \bar{X})^T \cdot A \cdot S_{B\bar{B}} \bar{Y} = \bar{X}^T \cdot (S_{B\bar{B}}^T A S_{B\bar{B}}) \cdot \bar{Y} = \bar{X}^T \cdot \bar{A} \cdot \bar{Y}$$

de unde rezultă că

$$\bar{A} = S_{B\bar{B}}^T A S_{B\bar{B}}$$

Definiţia 4.3. *O formă biliniară $F : V \times V \to \mathbb{R}$ pe spaţiul vectorial V se numeşte **simetrică** dacă*

$$F(x, y) = F(y, x), \ \forall x, y \in V.$$

Exemple:

- orice produs scalar este o formă biliniară simetrică
- forma biliniară $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ nu este simetrică

Teorema 4.2. *O formă biliniară $F : V \times V \to \mathbb{R}$ pe spaţiul vectorial V este simetrică dacă şi numai dacă există o bază B a lui V în raport cu care matricea asociată lui F este simetrică.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$"
Presupunem că F este simetrică. Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui V şi A matricea lui F în această bază . Avem:

$$a_{ij} = F(e_i, e_j) = F(e_j, e_i) = a_{ji}, \ \forall i, j = 1, \dots, n$$

deci A este o matrice simetrică.

"$\Leftarrow$" Presupunem că matricea lui F într-o bază B este simetrică, deci $A = A^T$. Considerăm doi vectori oarecare $x, y \in V$ şi X, Y matricele coloană ale coordonatelor acestor vectori în baza B. Avem:

$$F(x, y) = X^T \cdot A \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y = (A \cdot X)^T \cdot Y = Y^T \cdot A \cdot X = F(y, x)$$

deci F este o formă biliniară simetrică.

4.2 Forme pătratice

Definiţia 4.4. *Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n. O aplicaţie*

$$\Phi : V \to \mathbb{R}$$

se numeşte ***formă pătratică*** *pe V dacă există o formă biliniară simetrică $F : V \times V \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\Phi(x) = F(x, x), \ \forall x \in V.$$

Aşadar oricărei forme biliniare simetrice îi putem asocia o formă pătratică. Reciproc, dacă avem o formă pătratică Φ, atunci forma biliniară din care provine aceasta este $F : V \times V \to \mathbb{R}$ dată prin

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y)], \ \forall x, y \in V.$$

Să considerăm acum o bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ în spaţiul vectorial V, o formă pătratică $\Phi : V \to \mathbb{R}$ şi forma biliniară simetrică $F : V \times V \to \mathbb{R}$ din care provine Φ. Fie de asemenea vectorul oarecare $x \in V$ exprimat în baza B astfel:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

Folosind proprietăţile de liniaritate ale lui F obţinem:

$$\Phi(x) = F(x,x) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^T A X$$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ iar A este matricea asociată lui F în baza B.

Exemplu Fie forma biliniară $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$F(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3, \ \forall x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Notăm vectorii din baza canonică din $\mathbb{R}^3$ cu $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Avem:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= F(e_1,e_1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 0 = 1\\
a_{22} &= F(e_2,e_2) = 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 0 = 2\\
a_{33} &= F(e_3,e_3) = 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 1 = 3\\
a_{12} &= F(e_1,e_2) = 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 0 = 0 = a_{21}\\
a_{13} &= F(e_1,e_3) = 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 1 = 0 = a_{31}\\
a_{23} &= F(e_2,e_3) = 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 1 = 0 = a_{32}
\end{aligned}$$

Matricea formei biliniare F în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Fie baza B formată din vectorii $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,-1)$, $f_3 = (1,-1,-1)$. Avem:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= F(f_1,f_1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 = 6\\
\bar{a}_{22} &= F(f_2,f_2) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6\\
\bar{a}_{33} &= F(f_3,f_3) = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6\\
\bar{a}_{12} &= F(f_1,f_2) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) = 0 = \bar{a}_{21}\\
\bar{a}_{13} &= F(f_1,f_3) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 1\cdot(-1) = -4 = \bar{a}_{31}\\
\bar{a}_{23} &= F(f_2,f_3) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 2 = \bar{a}_{32}
\end{aligned}$$

Aşadar matricea formei biliniare F în baza B este $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.
F este simetrică deoarece $F(\bar{x},\bar{y}) = F(\bar{y},\bar{x}), \ \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^3$.

Matricea de trecere de la baza canonică la baza B este $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Se verifică uşor că

$$S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Forma pătratică asociată este $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = F(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$.
Expresia formei pătratice Φ în baza B este

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \bar{X}^T \bar{A} \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \\ &= 6\bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_2^2 + 6\bar{x}_3^2 - 8\bar{x}_1\bar{x}_3 + 4\bar{x}_2\bar{x}_3 \end{aligned}$$

Definiţia 4.5. *Matricea A asociată formei biliniare simetrice F (din care provine forma pătratică Φ) în baza B se numeşte **matricea formei pătratice** Φ în baza B.*

Definiţia 4.6. *Spunem că o formă pătratică $\Phi : V \to \mathbb{R}$ este **redusă la forma canonică** dacă se determină o bază $B = \{f_1, \dots, f_n\}$ a lui V în raport cu care expresia lui Φ să fie de forma*

$$\Phi(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

unde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ iar $y_1, \dots, y_n$ sunt componentele vectorului $x \in V$ în baza B.

Teorema 4.3 (Gauss). *Fie $\Phi : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există cel puţin o bază în V în raport cu care expresia lui Φ are o formă canonică.*

Demonstraţie: Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază în V şi

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt coordonatele vectorului x în baza B.
Dacă $\Phi = 0$ atunci teorema este evident adevărată.
Dacă $\Phi \neq 0$ distingem două cazuri:

1. există cel puţin un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$;

2. $a_{ii} = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, adică $\Phi(x) = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij}x_ix_j$.

Cazul 1. Vom demonstra că există o bază în care Φ are formă canonică folosind inducţia matematică după $n = \dim V$.

Pentru $n = 1$, orice bază este formată dintr-un singur vector, deci vectorii au o singură coordonată, aşadar Φ este în forma canonică

$$\Phi(x) = a_{11}x_1^2.$$

Presupunem teorema adevărată pentru orice formă pătratică definită pe un spaţiu de dimensiune $n-1$ şi demonstrăm că este adevărată pentru orice formă pătratică definită pe un spaţiu de dimensiune n.

Putem presupune fără a reduce generalitatea că $a_{11} \neq 0$. Grupând toţi termenii care conţin pe x_1 şi formând un pătrat perfect, obţinem:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \bar{\Phi}(x_2, x_3, \dots, x_n) = \\ &= \tfrac{1}{a_{11}}(a_{11}^2x_1^2 + 2a_{11}a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{11}a_{1n}x_1x_n) + \bar{\Phi}(x_2, x_3, \dots, x_n) = \\ &= \tfrac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \Phi_1(x_2, x_3, \dots, x_n)\end{aligned}$$

unde Φ_1 este o formă pătratică în $x_2, \dots, x_n$.

Construim baza $B_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ în V cu ajutorul schimbării de coordonate:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases},$$

unde $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt coordonatele vectorului x în baza B_1, deci matricea de trecere de la baza B_1 la baza B este

$$S_{B_1B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{BB_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

deci vectorii bazei B_1 sunt $\begin{cases} f_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot e_1 \\ f_2 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot e_1 + e_2 \\ \vdots \\ f_n = -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot e_1 + e_n \end{cases}$

În noua bază B_1 forma pătratică Φ devine

$$\Phi(x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \Phi_1(y_2, \dots, y_n),\ \text{unde } x = \sum_{i=1}^n y_if_i.$$

şi aplicând ipoteza de inducţie, există o bază în care Φ are formă canonică.
Cazul 2. Dacă $a_{ii} = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ şi $\Phi \neq 0$, există cel puţin un coeficient $a_{ij} \neq 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a_{12} \neq 0$. Efectuăm schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_k = y_k, \ \forall k = 3, \dots, n \end{cases}$$

corespunzătoare matricei de trecere

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Aşadar în baza $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ dată prin

$$\begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 \\ f_2 = e_1 - e_2 \\ f_3 = e_3 \\ \vdots \\ f_n = e_n \end{cases} \qquad \text{expresia formei pătratice devine:}$$

$$\Phi(x) = 2a_{12}x_1x_2 + \tilde{\Phi}(x) = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + \tilde{\Phi}(x)$$

deci în baza B' forma pătratică Φ se încadrează în cazul 1.

Prin aplicarea repetată, de cel mult n ori a unuia din cele 2 cazuri descrise anterior , aşadar prin schimbări repetate de baze , se obţine o bază în raport cu care Φ are o formă canonică.

Teorema 4.4 (**Jacobi**). *Fie $\Phi : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică având în baza $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ matricea sociată A cu proprietatea că toţi minorii principali*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}, \ i = 1, \dots, n$$

sunt nenuli . Atunci există o bază $B = \{f_1, \dots, f_n\}$ a lui V în care Φ are forma canonică

$$\Phi(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$

unde $\Delta_0 = 1$ iar $y_1, \dots, y_n$ sunt componentele vectorului x în baza B.

Teorema 4.5. *Fie V un spaţiu vectorial euclidian şi $\Phi : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază ortonormată în V astfel încât matricea lui Φ în această bază să fie diagonală.*

Demonstraţie:

- Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată în V şi A matricea formei pătratice Φ în baza B;

- Cum Φ corespunde unei forme biliniare simetrice, matricea A este o matrice simetrică;

- Fie $T \in \mathcal{L}(V)$ endomorfismul care are matricea A în baza B, adică este definit prin
$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$$

- Cum matricea A este simetrică iar baza B este ortonormată, atunci T este o transformare autoadjunctă;

- Aşadar există o bază ortonormată formată din vectori proprii
$$\bar{B} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$
în care matricea endomorfismului T devine diagonală:
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui T;

- Dacă S este matricea de trecere de la baza B la baza $\bar{B}$, atunci avem
$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

- Construim endomorfismul $\bar{T} \in \mathcal{L}(V)$ dat prin
$$\bar{T}(e_i) = f_i, \ \forall i = 1, \ldots, n$$

- Avem $\bar{T}(e_i) = f_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} e_j, \ \forall i = 1, \ldots, n$, aşadar matricea endomorfismului $\bar{T}$ în baza B este chiar matricea S

- Cum transformarea $\bar{T}$ duce o bază ortonormată tot într-o bază ortonormată , $\bar{T}$ este o transformare ortogonală, deci

$$S^{-1} = S^T$$

- Pentru un vector oarecare $x \in V$, notăm cu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

matricele coloană ale coordonatelor lui x în bazele B, respectiv $\bar{B}$;

- Cum S este matricea de trecere de la B la $\bar{B}$, avem

$$X = S \cdot Y$$

- Expresia formei pătratice $\Phi(x)$ în baza $\bar{B}$ devine

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^T A X = (SY)^T \cdot A \cdot SY = Y^T (S^T A S) Y \\ &= Y^T (S^{-1} A S) Y = Y^T D Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \end{aligned}$$

Algoritmul de reducere la forma canonică a unei forme pătratice prin metoda transformărilor ortogonale constă din următorii paşi:

1. Se determină valorile proprii $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ ale matricei formei pătratice, precum şi subspaţiile de vectori proprii corespunzătoare $V_{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, n$

2. În fiecare subspaţiu propriu se construieşte o bază ortonormată folosind procedeul Gram-Schmidt, reuniunea acestor baze fiind baza $\bar{B}$ în care avem forma canonică

3. Se scrie forma canonică

$$\Phi(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

unde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt coordonatele vectorului x în baza $\bar{B}$

4. Se scriu relaţiile dintre coordonatele iniţiale şi cele în care avem forma canonică

$$X = S \cdot Y$$

unde S este matricea de trecere de la baza iniţială la baza $\bar{B}$

Exemplu Fie forma pătratică $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$\Phi(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Matricea formei pătratice Φ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Determinăm valorile şi vectorii proprii ai lui A:
$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) - 4(6-\lambda) - 4(4-\lambda) =$
$(5-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24)-8(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+16) = (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = \alpha \Rightarrow x_1 = x_3 = 2\alpha \Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(2\alpha, \alpha, 2\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} = Sp\{(2,1,2)\}$

$$\lambda_2 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = 2\alpha, x_3 = -2\alpha \Rightarrow V_{\lambda_2} = Sp\{(1,2,-2)\}$

$$\lambda_1 = 8 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = \alpha \Rightarrow x_1 = -2\alpha, x_2 = 2\alpha \Rightarrow V_{\lambda_3} = Sp\{(-2,2,1)\}$

2. Vectorii $v_1 = (2,1,2), v_2 = (1,2,-2), v_3 = (-2,2,1)$ sunt deja ortogonali. Baza ortonormată din vectori proprii va fi formată din versorii corespunzători acestor vectori :

$$f_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{3}(2,1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$f_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{3}(1,2,-2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$f_3 = \frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \frac{1}{3}(-2,2,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

3. Expresia formei pătratice Φ în baza $\bar{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ este

$$\Phi(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 2y_1^2 + 5y_2^2 + 8y_3^2$$

4. Matricea de trecere de la baza canonică la baza $\bar{B}$ are pe coloane componentele vectorilor f_1, f_2, f_3:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

iar legăturile dintre coordonatele iniţiale şi cele în care avem forma canonică sunt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \end{cases}$$

Teorema 4.6 (Sylvester). *Fie $\Phi : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică . Atunci numărul termenilor pozitivi şi al celor negativi dintr-o formă canonică a lui Φ nu depinde de baza în care este obţinută aceasta.*

Fie p şi q numărul termenilor pozitivi, respectiv negativi din forma canonică a unei forme pătratice Φ. Evident, $p + q \leq n$. În funcţie de valorile acestor constante, avem următoarea clasificare a formelor pătratice:

- Φ este *pozitiv definită* dacă $p = n$
- Φ este *negativ definită* dacă $q = n$
- Φ este *pozitiv semidefinită* dacă $q = 0$ şi $p < n$
- Φ este *negativ semidefinită* dacă $p = 0$ şi $q < n$
- Φ este *nedefinită* dacă $pq \neq 0$

4.3 Exerciţii

1. Să se reducă la forma canonică prin metoda Jacobi următoarele forme pătratice:

   a) $\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $\Phi(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$

c) $\Phi(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_3x_4$

d) $\Phi(x) = x_1^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$

Rezolvare:

a) Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

Forma canonică a lui h dată de metoda Jacobi este:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}y_3^2 = \\ &= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \end{aligned}$$

unde y_1, y_2, y_3 sunt coordonatele vectorului $\bar{x}$ în baza în care avem forma canonică.

b) $\Delta_1 = 3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 20.$

$\Phi(x) = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{8}y_2^2 + \frac{2}{5}y_3^2$

c) $\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} =$

$\frac{1}{16} \Rightarrow \Phi(x) = y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2 - 4y_4^2$

2. Să se reducă la forma canonică prin metoda Gauss următoarele forme pătratice:

a) $\Phi(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$

Rezolvare:

$\Phi(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2 = 5\left(x_1^2 - \frac{4}{5}x_1x_2 - \frac{4}{5}x_1x_3\right) +$
$+6x_2^2 + 4x_3^2 = 5\left(x_1^2 - 2\cdot x_1 \cdot \frac{2x_2}{5} - 2\cdot x_1\cdot\frac{2x_3}{5} + \frac{4}{25}x_2^2 + \frac{4}{25}x_3^2 - 2\frac{2x_2}{5}\frac{2x_3}{5}\right)$
$-\frac{4}{5}x_2^2 - \frac{4}{5}x_3^2 - \frac{8}{5}x_2x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2 = 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3\right)^2 + \frac{26}{5}x_2^2 + \frac{16}{5}x_3^2 -$
$\frac{8}{5}x_2x_3 = y_1^2 + \frac{26}{5}y_2^2 + \frac{16}{5}y_3^2 - \frac{8}{5}y_2y_3 =$
$= 5y_1^2 + \frac{26}{5}\left(y_2^2 - \frac{5}{26}\cdot\frac{8}{5}y_2y_3\right) + \frac{16}{5}y_3^2 = 5y_1^2 + \frac{26}{5}\left(y_2^2 - 2\cdot y_2\cdot\frac{2y_3}{13} + \frac{4y_3^2}{169}\right) -$
$-\frac{26}{5}\cdot\frac{4}{169}y_3^2 + \frac{16}{5}y_3^2 = 5y_1^2 + \frac{26}{5}\left(y_2 - \frac{2}{13}y_3\right)^2 + \frac{40}{13}y_3^2 = 5z_1^2 + \frac{26}{5}z_2^2 + \frac{40}{13}z_3^2$

b) $\Phi(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

c) $\Phi(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

d) $\Phi(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$

3. Să se reducă la forma canonică prin metoda valorilor şi vectorilor proprii următoarele forme pătratice, specificând şi baza în care avem această formă canonică:

$$\Phi(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$
$$\Phi(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$
$$\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$
$$\Phi(x) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$$

Capitolul 5

Vectori liberi

5.1 Spaţiul vectorilor liberi

Considerăm în spaţiul geometric tridimensional E_3 un segment orientat $\overrightarrow{AB}$. Punctul A se numeşte *originea* segmentului, iar B se numeşte *extremitatea* segmentului. Dacă $A \neq B$, atunci dreapta determinată de cele două puncte se numeşte *dreapta suport* a segmentului. În cazul în care originea şi extremitatea coincid, se obţine segmentul orientat *nul*.

Două segmente orientate au aceeaşi *direcţie* dacă dreptele lor suport coincid sau sunt paralele. Un segment orientat $\overrightarrow{AB}$ determină în mod unic pe dreapta AB un *sens* de parcurgere a acesteia. Două segmente orientate nenule, de aceeaşi direcţie, au *acelaşi sens* dacă extremităţile lor se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta care uneşte originile segmentelor în planul dreptelor suport paralele. În caz contrar, spunem că cele două segmente orientate (de aceeaşi direcţie) au *sensuri opuse*. *Lungimea* unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ se defineşte ca fiind distanţa dintre punctele A şi B, şi se notează cu $\|\overrightarrow{AB}\|$. Un segment orientat are lungimea 0 dacă şi numai dacă este segmentul nul.

Două segmente orientate care au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime se numesc *echipolente*. Relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă, ale cărei clase de echivalenţă se numesc *vectori liberi*. Aşadar, prin **vectorul liber** corespunzător segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ înţelegem mulţimea tuturor segmentelor orientate care au aceeaşi direcţie, sens şi lungime cu $\overrightarrow{AB}$. Direcţia, sensul şi lungimea comune reprezentanţilor unui vector liber $\overrightarrow{v}$ se vor numi **direcţia, sensul** şi **lungimea** vectorului liber $\overrightarrow{v}$. Vectorul liber de lungime 0 se numeşte **vectorul nul**, iar un vector liber de lungime 1 se numeşte **versor**.

Doi vectori liberi se numesc **coliniari** dacă au aceeaşi direcţie. Doi vectori liberi coliniari care au aceeaşi lungime dar sensuri opuse se numesc **vectori opuşi**. Opusul vectorului $\overrightarrow{v}$ se notează cu $-\overrightarrow{v}$. Doi vectori liberi sunt **egali** dacă reprezentantii lor sunt segmente orientate echipolente. Trei sau mai mulţi vectori liberi nenuli care au reprezentanţii paraleli cu acelaşi plan se numesc vectori **coplanari**.

Mulţimea tuturor vectorilor liberi se notează cu V_3. Să considerăm acum un punct oarecare $O \in E_3$. Oricărui punct $M \in E_3$ îi corespunde un unic vector liber $\overrightarrow{r} \in V_3$ al cărui reprezentant este $\overrightarrow{OM}$. Reciproc, oricărui vector liber $\overrightarrow{r}$ îi corespunde un unic punct $M \in E_3$ astfel încât $\overrightarrow{OM}$ să fie reprezentant al lui $\overrightarrow{r}$. Vectorul liber $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului M faţă de originea O.

Definiţia 5.1. *Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V_3$, $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant al lui $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{AB}$ un reprezentant al lui $\overrightarrow{b}$. Vectorul liber $\overrightarrow{c}$ care are ca reprezentant segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ se numeşte* ***suma*** *vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.*

Observaţii:

- Vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ sunt coplanari.
- Regula de mai sus pentru obţinerea sumei a doi vectori liberi se numeşte *regula triunghiului.*
- De asemenea, suma a doi vectori liberi poate fi definită şi folosind *regula paralelogramului*, ca fiind diagonala paralelogramului determinat de doi reprezentanţi ai celor doi vectori având aceeaşi origine.

Definiţia 5.2. *Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\overrightarrow{v} \in V_3$. Prin* ***înmulţirea*** *vectorului $\overrightarrow{v}$* ***cu scalarul*** *λ înţelegem vectorul liber $\lambda\overrightarrow{v}$ definit astfel:*

- *dacă $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ şi $\lambda \neq 0$, atunci $\lambda\overrightarrow{v}$ este vectorul care are aceeaşi direcţie cu $\overrightarrow{v}$, acelaşi sens cu $\overrightarrow{v}$ dacă $\lambda > 0$ şi sens opus dacă $\lambda < 0$, iar lungimea lui este $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|$;*
- *dacă $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ sau $\lambda = 0$, atunci $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*

Teorema 5.1. *Mulţimea vectorilor liberi V_3 împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari definite mai sus formează un spaţiu vectorial real.*

5.2 Coliniaritate şi coplanaritate

Teorema 5.2. *Fie* $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ *doi vectori liberi nenuli.*

1. *Dacă* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *sunt coliniari, atunci există un unic* $\lambda \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

2. *Mulţimea tuturor vectorilor coliniari cu* $\vec{a}$ *este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1, generat de* $\vec{a}$*:*

$$V_1 = \{\vec{v} \in V_3 | \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{a}\}.$$

3. *Vectorii* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *sunt necoliniari dacă şi numai dacă sunt liniar independenţi.*

Teorema 5.3. *Fie* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$*, cu* $\vec{a}, \vec{b}$ *necoliniari.*

1. *Dacă* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *sunt coplanari, atunci există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *unici astfel încât* $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

2. *Mulţimea tuturor vectorilor coplanari cu* $\vec{a}, \vec{b}$ *este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2, generat de* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$*:*

$$V_2 = \{\vec{v} \in V_3 | \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}\}.$$

Teorema 5.4. *Fie* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ *necoplanari şi un vector oareacare* $v \in V_3$*. Atunci există* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *unici astfel încât*

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Fie versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in V_3$ necoplanari, ale căror direcţii sunt perpendiculare două câte două, şi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ trei reprezentanţi ai acestor versori având originea comună O. Conform teoremei anterioare, orice vector liber $\vec{v} \in V_3$ poate fi scris în mod unic ca o combinaţie liniară de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{v} = x \vec{i} + y \vec{j} + y \vec{k}.$$

Expresia de mai sus se numeşte *expresia analitică* a vectorului $\vec{v}$, iar scalarii x, y, z se numesc *coordonatele euclidiene* ale vectorului $\vec{v}$. Dacă $\overrightarrow{OM}$ este un reprezentant al lui $\vec{v}$ cu originea în O, atunci expresia anterioară devine

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Sistemul $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se numeşte *reper cartezian ortogonal* în V_3, iar x, y, z se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului M în reperul $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Dacă $M, N \in E_3$ şi $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$, iar $\overrightarrow{ON} = x_N \vec{i} + y_N \vec{j} + z_N \vec{k}$ atunci

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_N - x_M)\vec{i} + (y_N - y_M)\vec{j} + (z_N - z_M)\vec{k}$$

Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$. Numărul $\varphi \in [0, \pi]$ ce reprezintă unghiul dintre dreptele suport ale vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numeşte **unghiul** dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Dacă unghiul dintre doi vectori este $\frac{\pi}{2}$, atunci vectorii se numesc *ortogonali.*

5.3 Produse cu vectori liberi

5.3.1 Produsul scalar

Definiţia 5.3. *Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ şi $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ dacă $\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$. Se numeşte **produs scalar** al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}$ numărul real definit prin:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\varphi, \ \text{dacă } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, \ \text{dacă } \vec{a} = \vec{0} \text{ sau } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

Proprietăţi

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3$;
2. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}), \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3, \ \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0, \ \forall \vec{a} \in V_3$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$;
5. $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ sunt ortogonali $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
6. dacă $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ şi $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$, atunci **expresia analitică a produsului scalar** este

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

iar lungimea lui $\vec{a}$ este

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

7. dacă $\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$ şi $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, atunci

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

5.3.2 Produsul vectorial

Definiţia 5.4. *Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ şi $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ dacă $\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$. Se numeşte **produs vectorial** al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ vectorul*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}$$

unde $\vec{e}$ este versorul perpendicular pe planul determinat de cei doi vectori şi orientat după regula burghiului , adică sensul de înaintare a unui burghiu când $\vec{a}$ se roteşte către $\vec{b}$ printr-un unghi minim.

Dacă $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ şi $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, atunci **expresia analitică a produsului vectorial** este

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Proprietăţi

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}), \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3$;

2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in V_3$

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$

4. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}, \ \forall \vec{a} \in V_3$

5. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3$

6. aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este

$$\mathcal{A}_{\text{paralelogram}} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

7. aria triunghiului determinat de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este

$$\mathcal{A}_{\text{triunghi}} = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

8. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$ sau $\vec{a}, \vec{b}$ sunt coliniari.

5.3.3 Produsul mixt

Definiţia 5.5. *Se numeşte* ***produs mixt*** *al vectorilor* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ *numărul real care este egal cu produsul scalar dintre vectorii* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b} \times \vec{c}$*:*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Dacă $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ şi $\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$, atunci **expresia analitică a produsului mixt** este

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Proprietăţi

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
2. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ dacă cel puţin unul dintre vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este $\vec{0}$ sau dacă cei trei vectori sunt coplanari;
4. volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este
$$\mathcal{V}_{\text{paralelipiped}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$
5. volumul tetraedrului determinat de vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este
$$\mathcal{V}_{\text{tetraedru}} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$
6. $(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \alpha(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + \beta(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$

5.3.4 Dublul produs vectorial

Definiţia 5.6. *Se numeşte* ***dublul produs vectorial*** *al vectorilor* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ *vectorul*

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Proprietăţi:

1. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ este un vector coplanar cu $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ şi avem

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$

4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = -(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

5.4 Exerciţii

1. a) Demonstraţi că vectorii $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt liniar dependenţi şi determinaţi scrierea vectorului $\vec{a}$ în funcţie de $\vec{b}$ şi $\vec{c}$.
   R: $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$

   b) Demonstraţi că vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\frac{1}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{11}{4}\vec{k}$ sunt liniar dependenţi şi determinaţi scrierea vectorului $\vec{c}$ în funcţie de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.
   R: $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$.

2. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

   a) Demonstraţi că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ este o bază;

   b) Determinaţi scrierea vectorului $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ în baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

   R: $\vec{v} = -2\vec{a} - 7\vec{b} + 3\vec{c}$

3. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \frac{1}{4}\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$

   a) Demonstraţi că $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ este o bază;

   b) Determinaţi scrierea vectorului $\vec{v} = \vec{i} - 18\vec{j} + \vec{k}$ în baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

   R: $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$

4. Se dau vectorii $\overrightarrow{OA} = 12\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

   a) Demonstraţi că ΔAOB este isoscel, iar ΔAOC este dreptunghic;

   b) Calculaţi perimetrul triunghiului ABC şi măsura unghiului A.

   <u>Rezolvare</u>: $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{12^2 + (-4)^2 + 3^2} = 13 = \|\overrightarrow{OB}\|$, deci triunghiul ΔAOB este isoscel;
   $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 12 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 0 \Rightarrow$ vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt perpendiculari , deci triunghiul ΔAOC este dreptunghic.
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -9\vec{i} + 16\vec{j} - 7\vec{k} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{386}$
   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -10\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k} \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{198}$
   $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -\vec{i} - 9\vec{j} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{82}$
   Perimetrul triunghiului ABC este $\sqrt{386} + \sqrt{198} + \sqrt{82}$.
   $$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{251}{\sqrt{386} \cdot \sqrt{198}} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{251}{\sqrt{386} \cdot \sqrt{198}}\right)$$

5. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$. Determinaţi numerele reale λ şi μ astfel încât vectorul $\vec{v} = \vec{a} + 2\lambda\vec{b} + 2\mu\vec{c}$ să fie:

   a) perpendicular pe planul yOz

   b) egal înclinat faţă de axele Ox, Oy, Oz.

   <u>Rezolvare</u>: $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k} + 2\lambda(-\vec{j} + 2\vec{k}) + 2\mu(-3\vec{i} + 3\vec{j})$
   $\vec{v} = (2 - 6\mu)\vec{i} + (-2\lambda + 6\mu)\vec{j} + (-1 + 4\lambda)\vec{k}$

   a) $\vec{v} \perp yOz \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} \perp \vec{j} \\ \vec{v} \perp \vec{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda + 6\mu = 0 \\ -1 + 4\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$
   $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{12}$

   b) $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{i}}) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{j}}) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{k}}) \Leftrightarrow \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{i}\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{j}\|} =$
   $= \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{k}\|} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{i} = \vec{v} \cdot \vec{j} = \vec{v} \cdot \vec{k} \Rightarrow$
   $2 - 6\mu = -2\lambda + 6\mu = -1 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}, \mu = \frac{7}{30}$

6. Se dau vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ despre care se ştie că $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Se consideră apoi vectorii $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ şi $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$. Calculaţi:

   a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\|\vec{c}\|$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{c})$

   b) aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{c}$ şi $\vec{d}$

   Rezolvare:

   a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3$
   $\|\vec{c}\|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{a} + 9\vec{b} \cdot \vec{b}$
   $= 4\|\vec{a}\|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\|\vec{b}\|^2 = 36 \Rightarrow \|\vec{c}\| = 6$
   $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\|} = \dfrac{1}{18}\vec{a} \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = \dfrac{1}{18}(2\|\vec{a}\|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dfrac{1}{2}$

   b) $\vec{c} \times \vec{d} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b} =$
   $= 5\vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \mathcal{A} = \|\vec{c} \times \vec{d}\| = 5\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 5\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 15\sqrt{3}$

7. Fie $\vec{a} = \vec{u} - 3\vec{v}$, $\vec{b} = -\vec{u} + 2\vec{v}$, $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ şi unghiul dintre vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este $\theta = \frac{\pi}{4}$. Să se calculeze $\vec{a} \cdot \vec{b}$, lungimile diagonalelor paralelogramului determinat de cei doi vectori, şi unghiul dintre ele.

8. Determinaţi scalarii $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(2, \lambda, 1), B(3, 7, 5), C(\mu, 10, 9)$ să fie coliniare.
   Rezolvare: $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + (7 - \lambda)\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = (\mu - 3)\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$
   $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 7 - \lambda & 4 \\ \mu - 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$
   $(16 - 4\lambda)\vec{i} + (4\mu - 16)\vec{j} + (24 - 3\lambda - 7\mu + \lambda\mu)\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 4.$

9. Se consideră punctele:

   i. $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(-5, -4, 8)$
   ii. $A(1, 1, -3), B(2, -1, 1), C(3, 3, 1), D(-1, 4, 2)$
   iii. $A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1), D(4, 1, 3)$

   Pentru fiecare din cazurile de mai sus, calculaţi:

   a) Perimetrul, unghiurile, aria şi înălţimile triunghiului ABC.

   b) Volumul, aria totală şi înălţimile tetraedrului $ABCD$.

10. Se dau vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + (\lambda+2)\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \lambda\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 4\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Determinaţi valoarea parametrului λ astfel încât vectorii să fie coplanari

   b) Pentru valoarea găsită anterior, descompuneţi vectorul $\overrightarrow{a}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ şi calculaţi aria paralelogramului determinat de vectorii $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$.

Capitolul 6

Planul şi dreapta în spaţiu

6.1 Planul

Fie $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ un reper cartezian ortogonal în V_3 şi un plan p în spaţiul geometric tridimensional E_3.

Definiţia 6.1. *Un vector nenul $\overrightarrow{N}$ se numeşte **vector normal** la planul p dacă dreapta suport a unui reprezentant al său este perpendiculară pe planul p.*

Dacă $\overrightarrow{N}$ este un vectori normal la planul p, atunci şi $\lambda\overrightarrow{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ este tot un vector normal la planul p.

Definiţia 6.2. *Doi vectori necoliniari $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ ai căror reprezentanţi au dreptele suport paralele cu planul p se numesc **vectori directori** ai planului p.*

Fie un plan p, un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în acest plan, şi $\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ un vector normal la planul p. Deoarece $\overrightarrow{N}$ este un vector nenul, rezultă că A, B, C nu sunt simultan nuli, adică $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Un punct oarecare $M(x, y, z) \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N} = 0$

Cum $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k}$, folosind expresia analitică a produsului scalar obţinem

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{6.1}$$

aşadar coordonatele oricărui punct din planul p verifică ecuaţia anterioară, care se numeşte **ecuaţia normală a planului**.

Ecuaţia (6.1) se rescrie

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$$

iar notând cu $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ obţinem

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6.2}$$

care se numeşte **ecuaţia generală a planului**.

Ecuaţia unui plan nu este unică. Dacă înmulţim (6.2) cu $\lambda \in \mathbb{R}^*$ obţinem

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$$

ecuaţie care este de asemenea verificată de coordonatele oricărui punct din planul p. Orice altă ecuaţie a planului p are coeficienţii proporţionali cu A, B, C, D.

Fie un plan p, punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in p$ şi $\overrightarrow{v}_1 = l_1\overrightarrow{i} + m_1\overrightarrow{j} + n_1\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}_2 = l_2\overrightarrow{i} + m_2\overrightarrow{j} + n_2\overrightarrow{k}$ doi vectori directori (deci necoliniari) ai planului p.

Un punct oarecare $M(x, y, z) \in p \Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ sunt coplanari, adică dacă şi numai dacă produsul mixt $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) = 0$.

Cum $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k}$, folosind expresia analitică a produsului mixt obţinem

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.3}$$

aşadar coordonatele oricărui punct din planul p verifică ecuaţia anterioară, care se numeşte **ecuaţia planului determinat de un punct şi doi vectori directori**.

Fie un plan p, punctele $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \in p$ şi $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ un vector cu dreapta suport paralelă cu p.

Un punct oarecare $M(x, y, z) \in p \Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v}$ sunt coplanari, adică dacă şi numai dacă produsul mixt

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v}) = 0.$$

Folosind expresia analitică a produsului mixt obţinem

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{6.4}$$

aşadar coordonatele oricărui punct din planul p verifică ecuaţia anterioară, care se numeşte **ecuaţia planului determinat de două puncte şi un vectori director**.

Fie un plan p şi punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ în planul p.

Un punct oarecare $M(x, y, z) \in p \Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ sunt coplanari, adică dacă şi numai dacă produsul mixt

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

Folosind expresia analitică a produsului mixt obţinem

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.5}$$

aşadar coordonatele oricărui punct din planul p verifică ecuaţia anterioară, care se numeşte **ecuaţia planului determinat de trei puncte**.

Observaţii

- Ecuaţia planului xOy este $z = 0$, iar ecuaţia unui plan paralel cu xOy este $z = z_0$;
- Ecuaţia planului xOz este $y = 0$, iar ecuaţia unui plan paralel cu xOz este $y = y_0$;
- Ecuaţia planului yOz este $x = 0$, iar ecuaţia unui plan paralel cu yOz este $x = x_0$;
- Proiecţiile punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe planele de coordonate sunt punctele de coordonate
$$(x_0, y_0, 0), (x_0, 0, z_0), (0, y_0, z_0)$$
- Simetricele punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ faţă de planele de coordonate sunt punctele de coordonate
$$(x_0, y_0, -z_0), (x_0, -y_0, z_0), (-x_0, y_0, z_0)$$

6.2 Dreapta

Fie d o dreaptă în spaţiul geometric tridimensional E_3.

Definiţia 6.3. *1. Vectorul nenul $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ ai cărui reprezentanţi au dreapta suport paralelă cu dreapta d, se numeşte* ***vector director*** *al dreptei d;*

*2. Numerele reale l, m, n se numesc **parametrii directori** ai dreptei d;*

3. $\overrightarrow{v}^0 = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \cdot \overrightarrow{v}$ *se numeşte **versor director** al dreptei d.*

*4. Numerele $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, unde α, β, γ sunt unghiurile făcute de vectorul $\overrightarrow{v}$ cu versorii $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{k}$, se numesc **cosinusuri directoare** ale dreptei d.*

Cosinusurile directoare se calculează în funcţie de parametrii directori astfel:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{i}}{\|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{i}\|} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{j}}{\|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{j}\|} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$
$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k}}{\|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{k}\|} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Parametrii directori l, m, n ai unei drepte nu sunt unici. Pentru orice $\lambda \neq 0$, numerele $\lambda l, \lambda m, \lambda n$ sunt de asemenea parametri directori deoarece vectorul $\lambda\overrightarrow{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{v}$ deci este de asemenea vector director al dreptei d.

Fie o dreaptă d, un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe această dreaptă, şi $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ un vector director al dreptei d.

Un punct oarecare $M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{v}$.

Cum $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k}$, obţinem

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda l \\ y - y_0 = \lambda m \\ z - z_0 = \lambda n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \tag{6.6}$$

care se numesc **ecuaţiile parametrice ale dreptei**, sau echivalent

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{n} \tag{6.7}$$

care se numesc **ecuaţiile canonice ale dreptei**.

Fie o dreaptă d şi punctele $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ pe dreapta d. Vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$ este un vector director al dreptei d şi avem

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}$$

Înlocuind în (6.7) coordonatele punctului M_1 şi componentele vectorului director $\overrightarrow{v}$ obţinem:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{6.8}$$

ecuaţii care sunt verificate de fiecare punct de pe dreapta d şi se numesc **ecuaţiile dreptei prin două puncte**.

Teorema 6.1. *Fie planele neparalele p_1 şi p_2 având ecuaţiile*

$$\begin{aligned}(p_1):\ & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ (p_2):\ & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}$$

Atunci ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a celor două plane sunt

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{n}$$

unde (x_0,y_0,z_0) este o soluţie a sistemului format din ecuaţiile celor două plane, iar parametrii directori sunt

$$l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\ m=\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\ n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}.$$

Demonstraţie: Deoarece planele p_1 şi p_2 sunt neparalele , vectorii normali

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N}_1&=A_1\overrightarrow{i}+B_1\overrightarrow{j}+C_1\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{N}_2&=A_2\overrightarrow{i}+B_2\overrightarrow{j}+C_2\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

sunt necoliniari, deci matricea $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{pmatrix}$ are rangul 2, aşadar sistemul format din ecuaţiile celor două plane este compatibil.

Dreapta de intersecţie este perpendiculară pe vectorii normali $\overrightarrow{N}_1$ şi $\overrightarrow{N}_2$, deci un vector director al acestei drepte poate fi ales $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{N}_1\times\overrightarrow{N}_2=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$,

de unde obţinem parametrii directori din enunţ.

Observaţii

- Ecuaţiile axei Ox sunt $\begin{cases} y=0\\ z=0\end{cases}$;
- Ecuaţiile axei Oy sunt $\begin{cases} x=0\\ z=0\end{cases}$;

- Ecuaţiile axei Oz sunt $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;
- Proiecţiile punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe axele de coordonate sunt punctele de coordonate
$$(x_0, 0, 0), (0, y_0, 0), (0, 0, z_0)$$
- Simetricele punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ faţă de axele de coordonate sunt punctele de coordonate
$$(x_0, -y_0, -z_0), (-x_0, y_0, -z_0), (-x_0, -y_0, z_0)$$

6.3 Unghiuri şi distanţe

6.3.1 Unghiul a două drepte

Fie dreptele d_1, d_2 date prin ecuaţiile:
$$d_1: \ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$
$$d_2: \ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$
Atunci unghiul θ dintre cele două drepte este dat de unghiul dintre vectorii directori ai celor două drepte $\overrightarrow{v}_1 = l_1 \overrightarrow{i} + m_1 \overrightarrow{j} + n_1 \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v}_2 = l_2 \overrightarrow{i} + m_2 \overrightarrow{j} + n_2 \overrightarrow{k}$:
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2}{\|\overrightarrow{v}_1\| \cdot \|\overrightarrow{v}_2\|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

6.3.2 Unghiul a două plane

Fie planele p_1, p_2 date prin ecuaţiile:
$$p_1: \ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$p_2: \ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$
Presupunem că planele nu coincid şi nu sunt nici paralele (cazuri în care unghiul dintre plane este 0) . Unghiul diedru dintre cele două plane este egal cu unghiul plan obţinut prin secţionarea planelor cu un plan perpendicular pe dreapta de intersecţie a celor două plane , care este egal cu unghiul dintre normalele la cele două plane $\overrightarrow{N}_1 = A_1 \overrightarrow{i} + B_1 \overrightarrow{j} + C_1 \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{N}_2 = A_2 \overrightarrow{i} + B_2 \overrightarrow{j} + C_2 \overrightarrow{k}$:
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2}{\|\overrightarrow{N}_1\| \cdot \|\overrightarrow{N}_2\|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

6.3.3 Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Fie dreapta d şi planul p date prin ecuaţiile:

$$d: \ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$p: \ Ax + By + Cz + D = 0$$

Fie $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ un vector director al dreptei d şi $\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ un vector normal la planul p. Unghiul θ dintre dreapta d şi planul p este prin definiţie unghiul dintre dreapta d şi proiecţia acesteia pe planul p, care este egal cu complementul unghiului dintre dreapta d şi normala la planul p:

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{N}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

6.3.4 Distanţa de la un punct la un plan

Teorema 6.2. *Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi planul p dat prin ecuaţia*

$$p: \ Ax + By + Cz + D = 0$$

Atunci distanţa de la punctul M_0 la planul p este

$$dist(M_0, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Demonstraţie: Scriem ecuaţiile perpendicularei din M_0 pe planul p:

$$d: \ \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

Fie $\{M_1\} = d \cap p$. Atunci distanţa de la M_0 la p este lungimea segmentului M_0M_1.

Ecuaţiile parametrice ale lui d sunt $\begin{cases} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \\ z = z_0 + \lambda C \end{cases}$.

Înlocuind în ecuaţia planului p obţinem

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + \lambda(A^2 + B^2 + C^2) = 0$$
$$\lambda_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Vectorul $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda_1 A\vec{i} + \lambda_1 B\vec{j} + \lambda_1 C\vec{k}$ are lungimea

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{M_0M_1}\| &= \sqrt{\lambda_1^2(A^2+B^2+C^2)} = |\lambda_1|\sqrt{A^2+B^2+C^2}\\ &= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}$$

6.3.5 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Teorema 6.3. *Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi dreapta d dată prin ecuaţiile*

$$d: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

Atunci distanţa de la punctul M_0 la dreapta d este

$$dist(M_0, d) = \frac{\|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

unde $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d$, iar $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

Demonstraţie: Fie M proiecţia lui M_0 pe d şi θ unghiul dintre $\overrightarrow{M_1M_0}$ şi $\vec{v}$. Avem $\operatorname{dist}(M_0, d) = \|\overrightarrow{M_0M}\| = \|\overrightarrow{M_1M_0}\|\sin\theta = \dfrac{\|\overrightarrow{M_1M_0}\|\|\vec{v}\|\sin\theta}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

6.3.6 Perpendiculara comună. Distanţa dintre două drepte

Fie două drepte necoplanare date prin ecuaţiile

$$\begin{aligned}d_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}\\ d_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}\end{aligned}$$

Există o dreaptă unică d perpendiculară pe d_1 şi d_2 care şi intersectează cele două drepte, numită *perpendiculara comună*. Notăm cu $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in d_2$ iar $\vec{v}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, $\vec{v}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ vectori directori ai celor două drepte. Atunci un vector director al perpendicularei comune este vectorul

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k},$$

iar ecuaţiile perpendicularei comune sunt obţinute prin intersectarea planelor p_1 care conţine d_1 şi d, şi p_2 care conţine d_2 şi d.

$$p_1 : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

$$p_2 : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Avem $d = p_1 \cap p_2$, iar distanţa dintre cele două drepte este lungimea perpendicularei comune, care este egală cu înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$, considerând ca bază paralelogramul construit pe vectorii $\overrightarrow{v}_1$ şi $\overrightarrow{v}_2$:

$$\mathrm{dist}(d_1, d_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\right)\right|}{\|\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2\|}$$

6.4 Exerciţii

1. Se consideră punctul $A(-1, 2, 4)$ dreapta $(d) : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$ şi planul $(p) : x + 2y - 2z = 4$. Se cer:

   (a) vectorul $\overrightarrow{OA}$, un vector director al dreptei d notat cu $\overrightarrow{v}$ şi un vector normal la planul p notat cu $\overrightarrow{N}$; analizaţi dacă $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{N}$ sunt coplanari.

   (b) ecuaţiile dreptei prin A paralelă cu d

   (c) ecuaţia planului prin A paralel cu planul p

   (d) ecuaţia planului prin d care este perpendicular pe xOz

   (e) simetricele punctului A faţă de planele şi axele de coordonate

   (f) ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie dintre planele p şi xOy

2. Fie punctele $A(1, 0, -2), B(0, 1, 3)$ şi planul (p) : $2x - y + 3z - 5 = 0$. Să se determine

   (a) vectorul $\overrightarrow{AB}$, normala planului $\overrightarrow{N}$ şi produsul vectorial dintre $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{N}$

   (b) ecuaţiile dreptei prin A, paralelă cu Ox

(c) ecuaţia planului prin B şi paralel cu p

(d) ecuaţiile dreptei AB

(e) ecuaţia planului prin A şi B, care este ortogonal pe p

(f) simetricul lui B faţă de Oz, xOy şi p

3. Se consideră punctele $A(1,0,1), B(0,1,2)$ şi vectorul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$. Să se determine

   (a) ecuaţia planului prin A şi perpendicular pe $\overrightarrow{v}$

   (b) ecuaţiile dreptei AB

   (c) proiecţia lui B în planul xOz şi simetricul lui B faţă de Oz

   (d) dist (A, yOz)

   (e) ecuaţiile dreptei prin A paralelă cu Ox

   (f) ecuaţia planului ce conţine axa Ox şi punctul B

4. Se consideră punctul $A(0,1,3)$, dreapta $(d): \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z-5=0 \end{cases}$ şi planul $(p): \ x-y+3z=1$. Notăm cu $\overrightarrow{v}$ vectorul director al dreptei şi cu $\overrightarrow{N}$ normala planului. Se cer:

   (a) ecuaţiile canonice ale dreptei d

   (b) determinaţi un vector ortogonal pe $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{N}$ şi stabiliţi dacă vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{N}$ sunt coplanari.

   (c) ecuaţia planului prin A perpendicular pe dreapta d

   (d) proiecţia lui A în planul xOz , simetricul lui A faţă de Oz

   (e) ecuaţiile dreptei prin A paralelă cu Ox şi ecuaţia planului prin A paralel cu xOy

   (f) ecuaţia planului ce conţine dreapta d şi este perpendicular pe planul p

5. Să se afle coordonatele simetricului punctului $M(4,1,6)$ faţă de dreapta

$$(d) \begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$$

6. Se dau dreapta

$$(d)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$$

şi planul

$$(p)\ x + y + z + 1 = 0.$$

Să se determine:

(a) ecuaţiile proiecţiei dreptei d pe planul p;

(b) ecuaţiile simetricei dreptei d faţă de planul p.

7. Fie planele

$$(p_1)\ 2x - y - z - 2 = 0$$

$$(p_2)\ x + 2y + 2z + 1 = 0,$$

dreptele

$$(d_1)\ \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$$

$$(d_2)\ \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$$

şi punctul $M(5,-1,1)$. Să se găsească:

(a) unghiul dintre planele p_1 şi p_2

(b) unghiul dintre dreptele d_1 şi d_2

(c) unghiul dintre dreapta d_2 şi planul p_1

(d) distanţa de la M la planul p_2

(e) distanţa de la M la dreapta d_1

(f) ecuaţiile perpendicularei comune dreptelor d_1 şi d_2

(g) distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2